

ORIGINAL ARTICLE

Study of Tunneling in Two-Electron Quantum Disc in the Presence of Harmonic Potential and Magnetic Field

Zohre Ahmadi¹, Ebrahim Sadeghi^{2*}, Kavous Abbasi³

1 M.Sc. Student in Physics, Faculty of Science, Yasouj University, Yasouj, Iran.

2 Professor, Physics, Faculty of science, Yasouj University, Yasouj, Iran.

3 Assistant Professor, Physics, Faculty of Science, Yasouj University, Yasouj, Iran.

Correspondence

Ebrahim Sadeghi

Email: sadeghi@yu.ac.ir

ABSTRACT

A two-electron quantum disc under harmonic confinement potential and uniform magnetic field normal to surface disc is considered. In this regard, a change of variable is used and the total Hamiltonian is divided into center of mass and relative-motion part Hamiltonians. The Schrodinger equations of each part are analytically solved, and the wave functions and the eigen values energy are obtained. To study the tunneling effect, a constant confinement potential for the barrier region is considered, and the quantum transmission coefficient is calculated in terms of height and barrier width and magnetic field. Results show that the transmission coefficient decreases with increasing height and width barrier, and increases with the magnetic field.

KEY WORDS

Quantum Disc, Tunneling Effect, 2-Electron System, Harmonic Confinement Potential.

How to cite

Ahmadi, Z. Sadeghi, E. Abbasi, K. (2025). Study of Tunneling in Two-Electron Quantum Disc in the Presence of Harmonic Potential and Magnetic Field, Optoelectronic, 8(1), 59-65.

فصلنامه علمی

اپتوالکترونیک

«مقاله پژوهشی»

بررسی تونل زنی در یک قرص کوانتومی دو الکترونی در حضور پتانسیل هماهنگ و میدان مغناطیسی

زهره احمدی^۱، ابراهیم صادقی^{۲*}، کاوس عباسی^۳

چکیده

در این پژوهش یک قرص کوانتومی شامل ۲ الکترون در حضور پتانسیل تحدیدی هماهنگ و میدان مغناطیسی یکنواخت عمود بر قرص بررسی شده است. در این راستا با استفاده از تغییرمغیرهای مناسب هامیلتونی ساختار به ۲ هامیلتونی مرکز جرم و حرکت نسبی تفکیک و معادله شرودینگر هر قسمت به صورت تحلیلی حل شده و تابع موج و ویژه مقادیر انرژی قسمت‌های مختلف به دست آمده است. جهت بررسی پدیده تونل زنی، پتانسیل تحدیدی ثابتی برای ناحیه سد در نظر گرفته شده و ضریب انتقال کوانتومی را بر حسب پهنا و ارتفاع سد پتانسیل و همچنین شدت میدان مغناطیسی محاسبه نموده ایم. نتایج بیانگر کاهش ضریب انتقال کوانتومی به ناحیه سد با افزایش ارتفاع و پهناي سد پتانسیل و همچنین افزایش ضریب انتقال با شدت میدان مغناطیسی است.

واژه‌های کلیدی

قرص کوانتومی، تونل زنی، ساختار ۲ الکترونی، پتانسیل تحدید هماهنگ.

۱ دانشجوی کارشناسی ارشد فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه یاسوج، یاسوج، ایران.
۲ استاد، گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه یاسوج، یاسوج، ایران.
۳ استادیار، گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه یاسوج، یاسوج، ایران.

نویسنده مسئول:

ابراهیم صادقی

رایانامه: sadeghi@yu.ac.ir

استناد به این مقاله:

زهره احمدی، ابراهیم صادقی، کاوس عباسی (۱۴۰۴). بررسی تونل زنی در یک قرص کوانتومی دو الکترونی در حضور پتانسیل هماهنگ و میدان مغناطیسی. فصلنامه علمی اپتوالکترونیک، ۱۸ (۱)، ۶۵-۵۹.

<https://jphys.journals.pnu.ac.ir>

مقدمه

ویژگی‌های نانوساختارهای تک الکترونی در حضور میدان مغناطیسی و انواع پتانسیل‌های تحدیدی توسط پژوهشگران به صورت تحلیلی، عددی و تجربی از چند دهه قبل بررسی شده‌اند [۵-۱]. از طرف دیگر ظهور نانوساختارهایی با قابلیت‌ها و کاربردهای متنوع در سامانه‌های الکتروپتیک دستاورد بشر در قرن حاضر بوده و توانسته راه‌گشای بسیاری از محدودیت‌های قبلی شود. بررسی ساختارهای کوانتومی تک الکترونی از سال‌های پیش مورد توجه محققان زیادی قرار داشته است. در صورتی که سامانه‌های بس‌ذره‌ای همانند نقاط کوانتومی چند الکترونی، دارای جنبه‌های فیزیکی و کاربردی واقعی‌تر بوده و لذا تعیین خصوصیات و ویژگی‌های فیزیکی آن‌ها از اهمیت بیشتری برخوردار است. برای بررسی ساختارهای بس‌ذره‌ای روش‌های متعددی از قبیل هارتری-فوک، وردشی، قطری‌سازی ماتریس هامیلتونی و... وجود دارد [۶-۸]. در اکثر مطالعات انجام شده، پژوهشگران پتانسیل تحدیدی را ثابت (نامحدود) در نظر گرفته و ویژگی‌های فیزیکی را بر این فرض به دست آورده‌اند. از طرف دیگر، درک پدیده تونل‌زنی در شاخه‌های مختلف فیزیک از قبیل ابرشارگی الکترون‌ها در رسانش فلزات، واپاشی هسته و... به عنوان یک چالش مطرح و پژوهش‌های نظری و عملی زیادی روی آن‌ها انجام شده است [۹-۱۴]. در این پژوهش یک قرص کوانتومی دو الکترونی را در نظر گرفته، پتانسیل تحدیدی را به صورت ترکیبی از پتانسیل‌های نوسان‌گر هماهنگ و سد پتانسیل محدود فرض کرده و پدیده تونل‌زنی را در این نانوساختار دو الکترونی بررسی نموده‌ایم.

تئوری

نقطه کوانتومی بحث‌شده را به صورت یک قرص کوانتومی ۲ بعدی (صفحه (x, y) و یا (r, θ)) در نظر می‌گیریم. هامیلتونی این سامانه دو الکترونی در حضور میدان مغناطیسی به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$H = \sum_{i=1}^2 \left[\frac{(\hat{p}_i + \frac{e}{c} \vec{A}_i)^2}{2m} + V_i \right] + \frac{ke^2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} + H_s \quad (۱)$$

در عبارت فوق $\vec{p}_i$ ، $\vec{A}$ و V و H_s به ترتیب بیانگر عمل‌گر تکانه، پتانسیل برداری، پتانسیل تحدیدی و هامیلتونی اسپینی ناشی از برهم‌کنش اسپین الکترون‌ها با میدان مغناطیسی خارجی هستند. شکل‌های مختلفی از قبیل پتانسیل ثابت، گوسی، هماهنگ و... را می‌توان برای پتانسیل تحدیدی در نظر گرفت. در این مقاله پتانسیل به شکل نوسان‌گر هماهنگ $V_i =$

$\frac{1}{2}m\omega^2 r_i^2$ فرض می‌گردد که در آن ω بیانگر فرکانس ارتعاشی است. برای حل معادله شرودینگر با هامیلتونی فوق بهتر است از تغییرمتغیرهای زیر استفاده شود. در این صورت حرکت مرکز جرم و نسبی تفکیک‌شده و جداگانه بررسی می‌شوند.

$$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1, \quad \vec{R} = \frac{\vec{r}_2 + \vec{r}_1}{2}, \quad (۲)$$

$$\vec{p}_r = \vec{p}_2 - \vec{p}_1, \quad \vec{p}_R = \frac{\vec{p}_2 + \vec{p}_1}{2}$$

با فرض میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B} = B\hat{k}$ می‌توان پتانسیل‌های برداری را به صورت $\vec{A}_i = \frac{1}{2}\vec{B} \times \vec{r}_i$ در نظر گرفت. در معادله (۱)، $H_s = g^* \mu_B (\vec{s}_1 + \vec{s}_2) \cdot \vec{B}$ است که در آن μ_B و g^* بیانگر مگنتون بوهر و ضریب لانده مؤثر است. تابع موج اسپینی به گونه‌ای انتخاب می‌شود که تابع موج کل پاد متقارن شود. با توجه به تغییرمتغیرهای رابطه (۲)، پتانسیل‌های برداری به شکل زیر تغییر می‌کنند.

$$\vec{A}(r) = \frac{\vec{A}(r_2) - \vec{A}(r_1)}{2}, \quad (۳)$$

$$\vec{A}(R) = \frac{\vec{A}(r_2) + \vec{A}(r_1)}{2}$$

با جای‌گذاری روابط (۲) و (۳) در معادله (۱)، هامیلتونی به صورت زیر بازنویسی می‌شود.

$$H = \frac{\hbar^2}{2m} \left\{ \left[2p_R^2 + 8 \frac{e^2}{c^2} A^2(R) + 8 \frac{e}{c} \vec{A}_R \cdot \vec{p}_R \right] + \frac{1}{4} \left[2p_r^2 + \frac{e^2}{2c^2} A^2(r) - 2 \frac{e}{c} \vec{A}_r \cdot \vec{p}_r \right] \right\} + V_1 + V_2 + k \frac{e^2}{r} + H_s \quad (۴)$$

با اندک عملیات جبری و استفاده از سیستم یکای اتمی، $\hbar = m = e = 1$ و تغییرمتغیرهای $A_R = 2A(R)$ ، $\omega_R = 2\omega$ ، $\omega_r = \frac{1}{2}\omega$ ، $A_r = \frac{1}{2}A(r)$ ، نسبی و حرکت مرکز جرم تفکیک می‌گردند.

$$H = 2 \left[\frac{1}{2}(\vec{p}_r + \frac{1}{c} \vec{A}_r)^2 + \frac{1}{2} \omega_r^2 r^2 + \frac{1}{2r} \right] + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}(\vec{p}_R + \frac{1}{c} \vec{A}_R)^2 + \frac{1}{2} \omega_R^2 R^2 \right] + H_s = 2H_r + \frac{1}{2}H_R + H_s \quad (۵)$$

برای حل معادله شرودینگر، تابع موج را به صورت زیر در نظر می‌گیریم.

$$\psi(r, R, s_1, s_2) = \varphi(r) \phi(R) \chi_{s_1, s_2} \quad (۶)$$

با توجه به شکل هامیلتونی (۵)، معادله شرودینگر به سه معادله جدا از هم تبدیل می‌گردد.

$$H_r \varphi(r) = E_r \varphi(r), \quad (۷)$$

$$H_R \phi(R) = E_R \phi(R), \quad (۸)$$

$$H_s \chi_{s_1, s_2} = E_s \chi_{s_1, s_2} \quad (۹)$$

قسمت مرکز جرم، معادله (۸)، به راحتی حل شده و جواب‌های آن بر حسب توابع ویتاکر بیان می‌شوند. برای حل

جرم، حرکت نسبی و اسپینی تفکیک می‌گردد. قسمت مرکز جرم با اندکی تفاوت، $E_R - V_1$ ، مشابه حالت قبل است. معادله شرودینگر قسمت حرکت نسبی با فرض $\varphi_{II}(r, \theta) = e^{im\theta} \frac{u_{II}(r)}{\sqrt{r}}$ به شکل زیر بیان می‌گردد.

$$-\frac{1}{2} \left[\frac{d^2 u_{II}(r)}{dr^2} + \left(\frac{1}{4} - m^2 \right) \frac{u_{II}(r)}{r^2} \right] + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} \omega_L^2 r^2 + 2m\omega_L + \frac{1}{r} \right) u_{II}(r) = E_r u_{II}(r) \quad (15)$$

جواب معادله دیفرانسیل فوق بر حسب توابع فوق هندسی، HeunB و به شکل زیر به دست می‌آید.

$$u_{II}(r) = A_{II}(r - R_1)^{m+\frac{1}{2}} e^{-(r-\frac{R_1}{4})^2} \quad (16)$$

$$\text{HeunB} \left(2m, 0, 2E_r, \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\omega_L}}, \frac{(r - R_1)}{\sqrt{2}} \right)$$

ضریب A_{II} توسط بهنجارش تابع موج قابل محاسبه است.

برای تعیین ضریب انتقال (تونل‌زنی)، از رابطه $T =$

$\frac{|J_{transmitted}|}{|J_{incident}|}$ استفاده می‌گردد. در رابطه فوق J_{tra} و J_{inc} به ترتیب بیانگر شار انتقالی و تابشی به سد پتانسیل هستند و از معادله زیر محاسبه می‌شوند [۱۵].

$$J_{inc,tra} = \frac{i\hbar}{2m} \left(\Psi_{i,t} \frac{d\Psi_{i,t}^*}{dr} - \Psi_{i,t}^* \frac{d\Psi_{i,t}}{dr} \right) \quad (17)$$

در عبارت فوق Ψ_i و Ψ_t به ترتیب بیانگر تابع موج در

ناحیه قرص کوانتومی و سد هستند که توسط روابط (۱۳) و (۱۶) قابل محاسبه هستند.

نتایج

برای انجام محاسبات، یکای طول بر اساس واحد طول نوسانگر هماهنگ $l = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$ و انرژی بر حسب $\hbar\omega$ در نظر گرفته شده است. با استفاده از روابط به دست آمده از بخش قبل، تابع موج و انرژی قسمت حرکت نسبی سیستم دو الکترونی محاسبه و نتایج ترسیم شده‌اند. توابع موج قسمت نسبی برای حالت پایه کوانتومی $m=0$ و بازای $n=2/3$ (تعداد جملات در بسط تابع موج، معادله ۱۳) در شکل (۱) آورده شده‌اند. همچنان که از شکل‌های فوق دیده می‌شود تابع موج بازای مقادیر کوچک r (فاصله دو ذره از یکدیگر) کوچک بوده، با افزایش r افزایش یافته به مقدار حداکثری می‌رسد و سپس کاهش می‌یابد. به عبارت دیگر احتمال حضور دو ذره در فواصل نزدیک به هم کوچک است با افزایش r احتمال حضور افزایش یافته به مقدار حداکثری می‌رسد و نهایتاً بازای فواصل بزرگ کاهش می‌یابد.

معادله شرودینگر قسمت نسبی، معادله (۷) و با اندک عملیات جبری و جای‌گذاری $A_r^2 = \frac{1}{4} A^2 = \frac{1}{4} (\frac{1}{4} B^2 r^2)$ به معادله زیر خواهیم رسید.

$$-\frac{1}{2} \left[\frac{1}{\sqrt{r}} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \sqrt{r} + \frac{1}{4r^2} + \right. \quad (10)$$

$$\left. \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right] \varphi(r, \theta) + \frac{1}{2} \left(\omega_r^2 + \frac{1}{4} \omega_L^2 \right) r^2 \varphi(r, \theta) - i\omega_L \frac{\partial}{\partial \theta} \varphi(r, \theta) + \frac{1}{2r} \varphi(r, \theta) = E_r \varphi(r, \theta)$$

در عبارت فوق $\omega_L = \frac{eB}{2mc} = \frac{B}{2c}$ ، فرکانس لارمور است. تابع موج را به صورت زیر در نظر گرفته و در معادله (۱۰) جای‌گذاری می‌کنیم.

$$\varphi(r, \theta) = e^{im\theta} \frac{u(r)}{\sqrt{r}} \quad (11)$$

$$m = 0, \pm 1$$

پس از جای‌گذاری و حذف قسمت زاویه‌ای، خواهیم داشت

$$-\frac{1}{2} \left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{4r^2} + \frac{-m^2}{r^2} \right] u(r) + \frac{1}{2} \left(\omega_r^2 + \frac{1}{4} \omega_L^2 \right) r^2 u(r) + m\omega_L u(r) + \frac{1}{2r} u(r) = E_r u(r) \quad (12)$$

برای حل معادله (۱۲) از روش سری‌ها استفاده می‌گردد.

برای این منظور

$$u_I(r) = e^{-\frac{r^2}{2}} \sum_{v=0}^{\infty} a_v r^{v+|m|+1/2} \quad (13)$$

را در نظر گرفته و با جای‌گذاری در معادله (۱۲) و مساوی

قرار دادن ضرایب جملات با توان‌های یکسان، روابط بازگشتی تعیین می‌شوند. با توجه به دقت مورد نظر، جملات سری فوق بازای یک $v(=n)$ خاص خاتمه داده شده و با اعمال شرط بهنجارش تابع موج، انرژی و ضرایب بسط تابع موج، a_v ، تعیین می‌گردند.

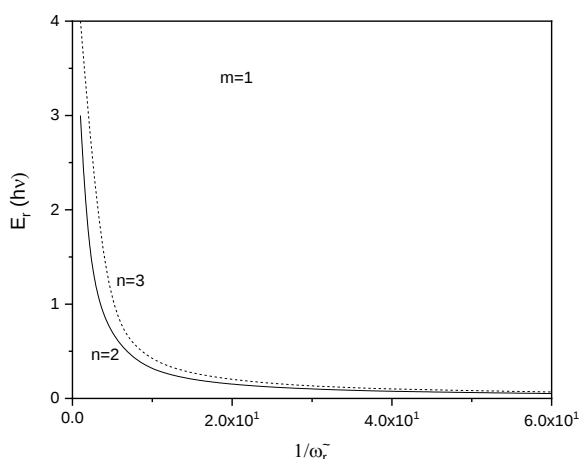
جهت بررسی تونل‌زنی، ساختار مورد نظر را به صورت یک

نقطه کوانتومی قرص شکل و انرژی پتانسیل را به صورت ترکیبی از پتانسیل هماهنگ (ناحیه قرص: $0 \leq R \leq R_1$) و یک سد پتانسیل ثابت V_{II} (ناحیه سد: $V_{II} = \frac{1}{2} \omega^2 R_1^2 + V_0$) و پهنای $R_2 - R_1$ در نظر می‌گیریم. هامیلتونی سیستم دو ذره‌ای برای ناحیه سد نیز به صورت معادله (۱) بوده با این تفاوت که در این حالت $V_i = V_{II} = \text{constant}$ است. با اعمال تغییرمغیرهای (۲) و (۳) و به کارگیری یکای اتمی، رابطه زیر به دست می‌آید.

$$H = 2 \left[\frac{1}{2} \left(\vec{p}_r + \frac{1}{c} \vec{A}_r \right)^2 + \frac{1}{2r} + V_{II} \right] + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \left(\vec{p}_R + \frac{1}{c} \vec{A}_R \right)^2 + V_{II} \right] + H_s \quad (14)$$

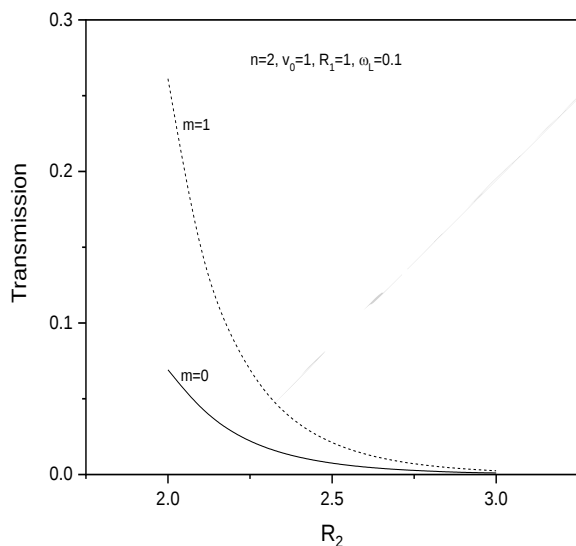
مجدداً، تابع موج را به صورت حاصل ضرب توابع در نظر

گرفته $\psi_{II} = \varphi_{II}(r) \phi_{II}(R) \chi_{s_1 s_2}$ و مجدداً معادله شرودینگر برای ناحیه سد به سه معادله برای حرکت مرکز



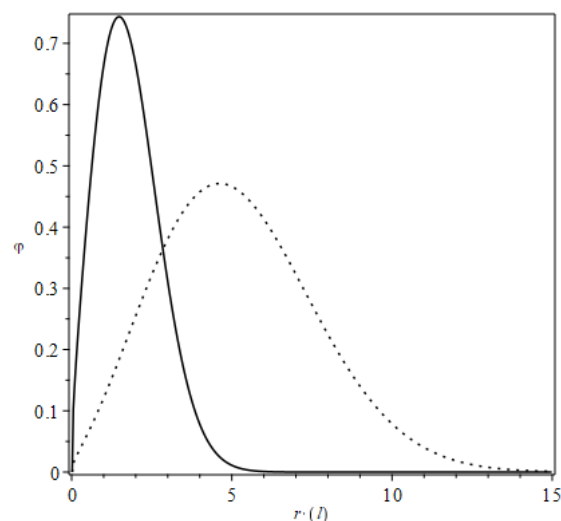
شکل ۳. انرژی حرکت نسبی سامانه دو الکترونی در حضور پتانسیل هماهنگ و میدان مغناطیسی بر حسب وارون فرکانس

در شکل (۴)، ضریب انتقال در نقطه کوانتومی بر حسب پهنای سد پتانسیل با ارتفاع محدود برای حالت‌های مختلف کوانتومی ترسیم شده است. برای این منظور با استفاده از معادلات (۱۳) و (۱۶) تابع موج در دو ناحیه قرص و سد محاسبه و با استفاده از معادله (۱۷) شار ذرات محاسبه شده‌اند. همچنان که از این شکل مشاهده می‌شود با افزایش پهنای سد پتانسیل ضریب انتقال کاهش می‌یابد که بیانگر کاهش در احتمال نفوذ ذرات به ناحیه سد است.



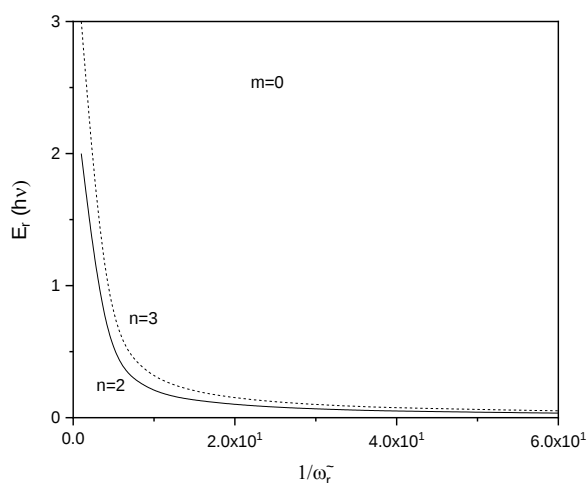
شکل ۴. ضریب انتقال کوانتومی بر حسب پهنای سد پتانسیل و ارتفاع ثابت

در شکل (۵) ضریب انتقال بر حسب ارتفاع سد پتانسیل و به ازای پهنای ثابت سد پتانسیل ترسیم شده است. همچنان که از این نمودارها دیده می‌شود ضریب انتقال با

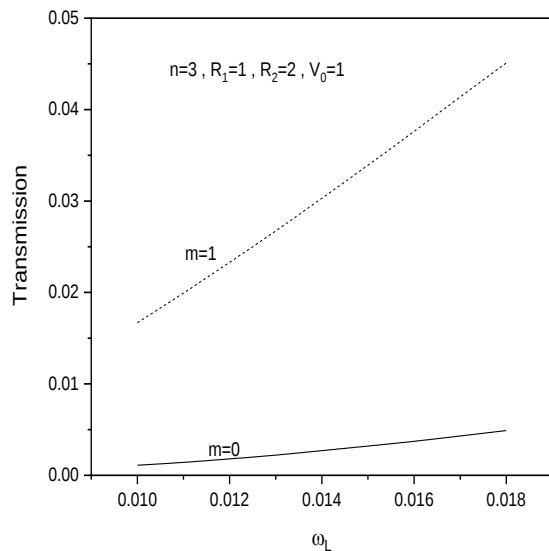


شکل ۱. تابع موج قسمت حرکت نسبی بازای $m=0$ و $n=2$ (منحنی خطی) و $n=3$ (نقطه چین)

در شکل‌های (۲) و (۳) انرژی حرکت نسبی بر حسب وارون فرکانس $\tilde{\omega}_T = \frac{1}{2}\sqrt{\omega^2 + \omega_L^2}$ برای حالت‌های مختلف کوانتومی $m=0/1$ و به ازای $n=2/3$ ترسیم گردیده‌اند. همچنان که از شکل‌های فوق دیده می‌شود با کاهش فرکانس $\tilde{\omega}_T$ (که می‌تواند ناشی از کاهش میدان مغناطیسی و یا کاهش فرکانس پتانسیل تحدیدی هماهنگ باشد)، انرژی حالت‌های مختلف کاهش می‌یابد. از طرف دیگر بازای $m = \text{constant}$ با افزایش n (تعداد جملات در بسط تابع موج) انرژی نیز افزایش می‌یابد. این رفتار می‌تواند به دلیل افزایش تعداد جملات در بسط تابع موج و نزدیک شدن تابع موج به مقدار دقیق آن باشد.



شکل ۲. انرژی حرکت نسبی سامانه دو الکترونی در حضور پتانسیل هماهنگ و میدان مغناطیسی بر حسب وارون فرکانس

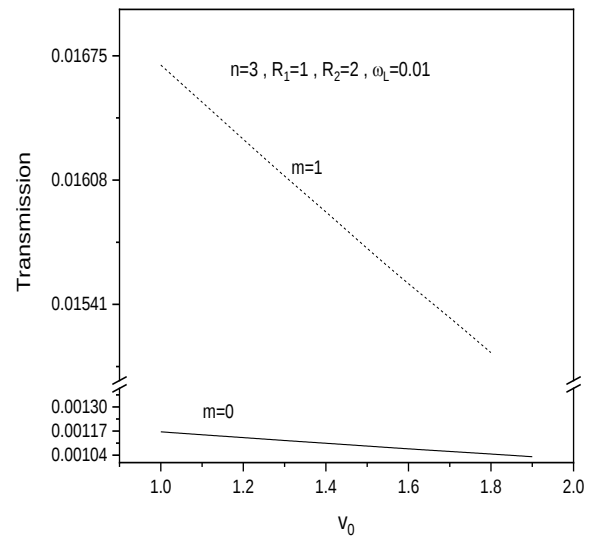


شکل ۶. ضریب انتقال کوانتومی بر حسب شدت میدان مغناطیسی در پهنای و ارتفاع ثابت سد پتانسیل

نتیجه‌گیری

در این پژوهش یک نقطه کوانتومی دو الکترونی تحت تاثیر هم‌زمان پتانسیل تحدیدی هماهنگ و میدان مغناطیسی یکنواخت بررسی شده، معادله شرودینگر به دو قسمت مرکز جرم و نسبی تفکیک و به‌صورت تحلیلی حل شده و تابع موج و انرژی محاسبه گردیده‌اند. ضریب انتقال کوانتومی بر حسب پهنای و ارتفاع سد پتانسیل و همچنین میدان مغناطیسی محاسبه و نتایج نشان‌دهنده کاهش آن با افزایش ارتفاع و پهنای سد پتانسیل و همچنین افزایش ضریب انتقال با شدت میدان مغناطیسی است.

افزایش ارتفاع سد پتانسیل، کاهش می‌یابد که بیانگر کاهش احتمال حضور ذرات در ناحیه سد است.



شکل ۵. ضریب انتقال کوانتومی بر حسب ارتفاع سد پتانسیل و پهنای ثابت

نهایتاً در شکل (۶) ضریب انتقال بر حسب فرکانس و بازای پهنای و ارتفاعی ثابت سد پتانسیل ترسیم شده است. همچنان که از این نمودارها دیده می‌شود با افزایش فرکانس (که بیانگر افزایش میدان مغناطیسی است)، ضریب انتقال افزایش می‌یابد این رفتار می‌تواند به دلیل افزایش انرژی ذرات (متناظر با شکل‌های ۲ و ۳) بوده و احتمال نفوذ به ناحیه سد افزایش یافته است.

References

- [1] M. J. Karimi, G. Rezaei, Effects of external electric and magnetic fields on the linear and nonlinear intersubband optical properties of finite semi-parabolic quantum dots, *Physica B* 406(23) (2011) 4423
- [2] B. Vaseghi, G. Rezaei, Z. Moini, S.H. Hendi, F. Taghizadeh, Effects of external magnetic field on the electron Zitterbewegung in the quantum dots and wires with Rashba spin-orbit interaction, *Superlattice and Microstructures* 49(4) (2011) 373
- [3] V. Fock, Bemerkung zur Quantelung des harmonischen Oszillators im Magnetfeld, *Z. Phys.* 47 (1928) 446
- [4] C. G. Darwin, The Diamagnetism of the Free Electron, *Proc. Camb. Phil. Soc.* 27 (1931) 86. Published online by Cambridge University Press: 24 October 2008
- [5] L. Jack, P. Hawrylak, A. Wojs, Quantum Dots, Springer, New York, 1998.

منابع

- [6] M. Wagner, U. Merkt, A. V. Chaplik, Spin-singlet-spin-triplet oscillations in quantum dots, *Phys. Rev. B* 45 (1992) 1951
- [7] B. Kandemir, Variational study of two-electron quantum dots, *Phys. Rev. B* 72 (2005) 165350
- [8] S.H. Ganjipour, E. Sadeghi, Two Interacting Atoms in a Two-Dimensional Anharmonic Trap Potential, *Optoelectronic, Spring* (2024) 6(3) 1-6, DOI: 10.30473/jphys.2023.69879.1177
- [9] I.S. Ishmukhamedov, A.S. Ishmukhamedov, Tunneling of two interacting atoms from excited states, *Physica E* 109 (2019) 24
- [10] S. E. Gharashi, D. Blume, Tunneling dynamics of two interacting one-dimensional particles, *Phys. Rev. A* 92 (2015) 033629
- [11] S. Chaudhuri, Two-electron quantum dot in a magnetic field: Analytic solution for finite potential model, *Physica E* 128 (2021) 114571
- [12] S. Chaudhuri, Electron tunneling energies of a

- quantum dot in a magnetic field, *Physica E* 144 (2022) 115425
- [13] A. Ranni, E. T. Manila, A. Eriksson, et al., Local and Nonlocal Two-Electron Tunneling Processes in a Cooper Pair Splitter, *Phys. Rev. Lett.* 129 (2022) 207703
- [14] M. Zhu, J. Tong, X. Liu, et al., Tunnelling of electrons via the neighboring atom, *Light: Science& Applications* 13:18 (2024) 1-8
- [15] J. J. Sakurai, Modern Quantum Mechanics, Addison-wesley publishing Co. 1994