

ORIGINAL ARTICLE

The Effect of Integrated Mathematical Modeling and GeoGebra on Students' Learning of Trigonometric Functions: A Mixed-Methods Study

Samira Mehraein¹ , Ali Iranmanesh^{2*} , Mohsen Rostamy-Malkhalifeh³ ,
MohammadHassan Behzadi⁴ 

1. PhD student, Department of Mathematics, Institute of Converging Sciences and Technologies, SR. C., Islamic Azad University, Tehran, Iran.
2. Professor, Department of Mathematics, Tarbiat Modares University, Tehran, Iran.
3. Associate Professor, Department of Mathematics, Institute of Converging Sciences and Technologies, SR. C., Islamic Azad University, Tehran, Iran.
4. Associate Professor, Department of Statistics, Institute of Converging Sciences and Technologies, SR. C., Islamic Azad University, Tehran, Iran.

Correspondence:

Ali Iranmanesh

Email: Iranmana@modares.ac.ir

Received: 29/Nov/2025

Revised: 09/Feb/2026

Accepted: 18/Apr/2026

Published: 23/Sep/2026

How to cite

Mehraein, S., Iranmanesh, A., Rostamy Malkhalifeh, M. & Behzadi, M.H. (2026). The Effect of Integrated Mathematical Modeling and GeoGebra on Students' Learning of Trigonometric Functions: A Mixed-Methods Study. *Technology and Scholarship in Education*, 6 (3), 22, 73-88. (<https://doi.org/10.30473/t-edu.2026.76688.1379>)

ABSTRACT

The present study investigated the effect of an integrative instructional intervention combining mathematical modeling activities with GeoGebra on students' performance in learning trigonometric functions. A quasi-experimental pretest-posttest design with two main groups (experimental and control) was employed. The final sample included 270 eleventh-grade students (132 in four experimental subgroups and 138 in four control subgroup). Data were collected using problem-based tests grounded in mathematical modeling and analyzed based on students' technical skills in GeoGebra and conceptual modeling levels. The experimental group received GeoGebra-based mathematical modeling instruction, whereas the control group was taught using traditional methods without technology. Quantitative analyses using one-way ANCOVA indicated significant improvements in students' performance ($p < 0.001$) with large effect sizes for digital technology ($\eta^2 = 0.715$) and mathematical modeling ($\eta^2 = 0.712$). Comparison of the two interventions showed no significant difference ($p = 0.339$), indicating the positive impact of both approaches. Qualitative findings revealed that students' active learning, group interaction, and deeper conceptual understanding were enhanced. Overall, integrating digital technology and mathematical modeling provides an effective model for interactive instruction and improving students' performance in complex mathematical topics.

KEYWORDS

Integrative Instruction, Trigonometric Modeling, GeoGebra, Student Performance, Conceptual Understanding.



مقاله پژوهشی

بررسی تأثیر آموزش تلفیقی مدل سازی ریاضی و نرم افزار GeoGebra بر عملکرد دانش آموزان در یادگیری توابع مثلثاتی: یک مطالعه آمیخته

سمیرا مهرآیین^۱ ID، علی ایرانمنش^{۲*} ID، محسن رستمی مال خلیفه^۳ ID، محمد حسن بهزادی^۴ ID

چکیده

پژوهش حاضر با هدف بررسی تأثیر آموزش مبتنی بر فناوری دیجیتال (GeoGebra) و فعالیت‌های مدل سازی ریاضی بر عملکرد دانش آموزان در یادگیری توابع مثلثاتی انجام شد. این مطالعه کاربردی و کمی- کیفی با غلبه رویکرد کمی و طرح نیمه آزمایشی پیش آزمون-پس آزمون با دو گروه اصلی آزمایش و کنترل بود. جامعه آماری شامل دانش آموزان پایه یازدهم بود و نمونه نهایی ۲۷۰ نفر (۱۳۲ دانش آموز در ۴ زیر گروه آزمایش و ۱۳۸ دانش آموز در ۴ زیر گروه کنترل) بود. ابزار گردآوری داده ها شامل آزمون های مسئله محور مبتنی بر مدل سازی ریاضی و تحلیل عملکرد دانش آموزان بر اساس سطوح مهارت فنی در GeoGebra و سطوح مفهومی مدل سازی بود. گروه آزمایش از طریق فعالیت های مدل سازی ریاضی مبتنی بر GeoGebra آموزش دید، در حالی که گروه کنترل به روش سنتی و بدون فناوری آموزش داده شد. داده های کمی با پیش آزمون و پس آزمون جمع آوری و با تحلیل کوواریانس تک متغیره بررسی شدند. یافته ها نشان دادند آموزش مبتنی بر فناوری و مدل سازی ریاضی عملکرد دانش آموزان را به طور معنادار بهبود داد ($p < 0.001$) با اندازه اثر بزرگ برای فناوری دیجیتال ($\eta^2 = 0.715$) و مدل سازی ریاضی ($\eta^2 = 0.712$). مقایسه عملکرد دو مداخله تفاوت معناداری نشان نداد ($p = 0.539$)، که حاکی از تأثیر مثبت هر دو رویکرد است. یافته های کیفی نیز نشان داد دانش آموزان در فرآیند یادگیری فعال و تعامل گروهی، درک مفهومی عمیق تر و مشارکت بیشتری داشتند. در مجموع، نتایج پژوهش نشان می دهد ادغام فناوری دیجیتال و مدل سازی ریاضی می تواند الگویی مؤثر برای آموزش تعاملی و ارتقای عملکرد دانش آموزان در مباحث پیچیده ریاضی ارائه دهد.

واژه های کلیدی

آموزش تلفیقی، مدلسازی مثلثاتی، GeoGebra، عملکرد دانش آموزان، درک مفهومی.

۱. دانشجوی دکتری، آموزش ریاضی، دانشکده علوم و فناوری های همگرا، واحد علوم و تحقیقات، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران.
۲. استاد، ریاضی محض، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه تربیت مدرس، تهران، ایران.
۳. دانشیار، ریاضی کاربردی، دانشکده علوم و فناوری های همگرا، واحد علوم و تحقیقات، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران.
۴. دانشیار، آمار، دانشکده علوم و فناوری های همگرا، واحد علوم و تحقیقات، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران.

نویسنده مسئول:

علی ایرانمنش

رایانامه: Iranmana@modares.ac.ir

تاریخ دریافت: ۱۴۰۴/۰۹/۰۸

تاریخ بازنگری: ۱۴۰۴/۱۱/۲۰

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۵/۰۱/۲۹

تاریخ انتشار: ۱۴۰۵/۰۷/۰۱

استناد به این مقاله:

مهرآیین، سمیرا؛ ایرانمنش، علی؛ رستمی مال خلیفه، محسن و بهزادی، محمد حسن. (۱۴۰۵). بررسی تأثیر آموزش تلفیقی مدل سازی ریاضی و نرم افزار GeoGebra بر عملکرد دانش آموزان در یادگیری توابع مثلثاتی: یک مطالعه آمیخته. فناوری و دانش پژوهی در تعلیم و تربیت، ۶(۳)، ۷۳-۸۸.

<https://doi.org/10.30473/t-edu.2026.76688.1379>



مقدمه

ریاضیات در آموزش باید به‌عنوان ابزاری پویا برای درک پدیده‌های زندگی روزمره، آمادگی برای مشاغل آینده، پرورش شهروندی آگاه، تقویت توانایی‌های حل مسئله انتقادی و تسهیل فهم سایر دروس مورد توجه قرار گیرد (فرد^۱ و همکاران، ۲۰۲۴). با این حال، درک فرایند یادگیری دانش‌آموزان همچنان یکی از چالش‌های اساسی پژوهش‌های آموزش ریاضیات محسوب می‌شود و تحلیل دقیق فعالیت‌ها و رفتارهای یادگیری آنان مستلزم بهره‌گیری از چارچوب‌های نظری مناسب است (دریجورس^۲ و همکاران، ۲۰۱۳). علاوه بر این، تدریس و یادگیری ریاضیات اغلب به‌عنوان یکی از چالش‌برانگیزترین فعالیت‌های آموزشی برای معلمان و دانش‌آموزان مطرح می‌شود؛ امری که ضرورت بازاندیشی در رویکردهای آموزشی و پژوهشی این حوزه را دوچندان می‌کند. (فرد و همکاران، ۲۰۲۴). از طرفی یادگیری فعال به عنوان یه رویکرد دانش‌آموزمحور برای آموزش و یادگیری تعریف می‌شود(مرادی، بیرنوندی، ۱۴۰۳).

ظهور نرم‌افزارهای ریاضی و محیط‌های دیجیتال، امکان نمایش مفاهیم پیچیده به‌صورت بصری و قابل دستکاری را فراهم ساخته و پلتفرم‌های آنلاین نیز آموزش تعاملی و ارتباط لحظه‌ای را ممکن کرده‌اند (لی و لی^۳، ۲۰۲۴). حل تکالیف ریاضی مستلزم استفاده از ابزارهای متنوعی از جمله قطب‌نما، خط‌کش، زبان، نمادها، حرکات بدنی و ابزارهای دیجیتال است و بررسی نحوه به‌کارگیری این ابزارها و نقش آن‌ها در یادگیری دانش‌آموزان اهمیت ویژه‌ای دارد(هاگستاد و ایسابو^۴، ۲۰۱۷).

تحقیقات آموزش ریاضی با فناوری دیجیتال نشان داده‌اند که طراحی محیط‌های یادگیری تعاملی با ابزارهای دیجیتال، فعالیت‌های دانش‌آموزان را تقویت می‌کند و در صورتی که فناوری به‌طور یکپارچه در آموزش، ارزیابی و طراحی تکالیف به‌کار رود، تأثیر واقعی آن بر یادگیری، درک مفهومی و خلاقیت دانش‌آموزان تحقق می‌یابد(فریمن^۵، ۲۰۲۰). در همین راستا، (روجانو و ساترلند^۶، ۲۰۲۰) تأکید می‌کنند که ادغام معنادار فناوری‌های دیجیتال در برنامه درسی ریاضی، نه تنها مستلزم دسترسی به ابزارها، بلکه نیازمند بازطراحی اهداف، فعالیت‌ها و شیوه‌های تدریس است؛ به گونه‌ای که یادگیری

دانش‌آموزان از تمرین‌های رویه‌ای فراتر رفته و به درک مفهومی و فعالیت‌های اکتشافی مبتنی بر حل مسئله و مدل‌سازی سوق داده شود. اگرچه ادغام فناوری در آموزش ریاضیات در اوایل قرن بیست و یکم با کندی همراه بود، در سال‌های اخیر به‌ویژه در کشورهای توسعه‌یافته، این روند با شتاب بیشتری دنبال شده است (اینگلبرت و بوربا^۷، ۲۰۲۳). از طرفی در دهه‌های اخیر، فناوری‌های آموزشی به یکی از محورهای اصلی تحول در نظام آموزش و پرورش تبدیل شده‌اند و نقش برجسته‌ای در بهبود فرایند یادگیری ایفا کرده‌اند(کرمی، ۲۰۲۵). همچنین پذیرش و استفاده از فناوری در آموزش عالی، با توجه به نقش آن در شخصی‌سازی یادگیری و بهبود کیفیت تدریس، تابع انتظار عملکرد و تأثیر اجتماعی است (محمدی و نصیری، ۱۴۰۴). در چنین بستری، فناوری‌های کلاس درس این امکان را فراهم می‌کنند که معلمان پیشرفت تحصیلی دانش‌آموزان را بهتر پایش کرده و فعالیت‌های آموزشی را به صورت مؤثرتری هدایت نمایند(ایکرت و نیلسون^۸، ۲۰۲۲).

مدل‌سازی ریاضی به فرایند حل مسائل دنیای واقعی با استفاده از ریاضیات اشاره دارد؛ در این فرایند، یک موقعیت واقعی به مدل ریاضی تبدیل شده، تحلیل می‌شود و نتایج آن در زمینه مسئله بازتفسیر می‌گردد (دورانن و همکاران^۹، ۲۰۲۱).

اهمیت مدل‌سازی ریاضی در آموزش ریاضیات در سطح بین‌المللی مورد پذیرش قرار گرفته است (گریفارت^{۱۰} و همکاران، ۲۰۲۲). اهمیت مدل‌سازی ریاضی در آموزش ریاضیات در سطح بین‌المللی مورد پذیرش قرار گرفته است (گریفارت و همکاران، ۲۰۲۲). در پژوهش‌های آموزش ریاضی، مدل‌سازی ریاضی به‌عنوان ابزاری نظری و تحلیلی کلیدی شناخته می‌شود که می‌تواند به بهبود یادگیری و عملکرد دانش‌آموزان در حل مسائل ریاضی منجر شود (هوخ‌موت و همکاران^{۱۱}، ۲۰۲۴).

علاوه بر این، مدل‌سازی ریاضی به روشن شدن نقش و کارکرد ریاضیات در مدرسه و آموزش عالی کمک می‌کند و به‌عنوان ابزاری مؤثر برای تقویت یادگیری محتوای ریاضی شناخته می‌شود (گوس و همکاران^{۱۲}، ۲۰۱۰). پژوهش‌ها نشان داده‌اند که ایجاد ارتباط میان مسائل ریاضی و موقعیت‌های واقعی می‌تواند علاقه دانش‌آموزان به

7. Engelbrecht & Borba
8. Eckert & Nilsson
9. Durandt et al
10. Greefrath et al
11. Hochmuth et al
12. Gos et al

1. Fererde et al
2. Drijvers et al
3. Li & Li
4. Haugstad & Isabo
5. Freiman
6. Rojano& Sutherland

حل مسئله را افزایش دهد و مشارکت فعال آنان را در فعالیت های آموزشی تقویت کند (کاراویز و همکاران^۱، ۲۰۲۱).

استفاده از ابزارهای فناورانه در محیط های یادگیری، هم برای دسترسی به مسائل معاصر و هم برای ارائه طیف متنوعی از فعالیت های آموزشی، امری اجتناب ناپذیر است (شونبردت و همکاران^۲، ۲۰۲۲). یکی از چارچوب های نظری مؤثر برای تبیین رابطه میان یادگیری مبتنی بر فناوری و نتایج یادگیری، نظریه پیدایش ابزاری است که بر توسعه همزمان مهارت های فنی در استفاده از ابزارهای دیجیتال و درک مفهومی تأکید دارد (ون دیج دروگرس^۳، ۲۰۲۱).

پژوهش ها نشان می دهند که ادغام مدل ها و مدل سازی در برنامه درسی ریاضی دوره متوسطه، انگیزش دانش آموزان را افزایش داده، یادگیری محتوا را تسهیل می کند و کاربرد عملی ریاضیات در حل مسائل واقعی را برجسته می سازد (گاوش^۴، ۲۰۱۵). مدل سازی ریاضی و مسائل دنیای واقعی به عنوان دو حوزه متمایز در نظر گرفته می شوند، اما امکان انتقال و تفسیر بین آن ها وجود دارد (بوشر و شنل^۵، ۲۰۱۷).

با این حال، مطالعات اخیر به وجود شکاف هایی در دانش پژوهشی درباره ویژگی های استدلال آماری و ریاضی مورد نیاز برای مدل سازی مسائل واقعی، به ویژه در بسترهای فناورانه، اشاره کرده اند (پاتل و پفانکوخ^۶، ۲۰۱۸). همچنین، علی رغم پیشرفت های فناوری در آموزش ریاضیات، نیاز به پژوهش های کمی که به طور تجربی پیامدهای آموزشی این رویکردها را بررسی کنند، همچنان احساس می شود (دارمانووا و همکاران^۷، ۲۰۲۵).

مثلاً یکی از مباحث اساسی ریاضیات دوره متوسطه است که نقشی مهم در رشد درک مفهومی، توانایی حل مسئله و مهارت های تفکر خلاق دانش آموزان ایفا می کند (بیلگیلی و کیلتاس^۸، ۲۰۲۱). با این وجود، توابع مثلثاتی از جمله بخش هایی از برنامه درسی هستند که دانش آموزان در یادگیری آن ها با دشواری های قابل توجهی مواجه می شوند و عملکرد ضعیف در این حوزه به عنوان یک مسئله مهم آموزشی در سطح ملی مطرح است (ماووس و اوگونای^۹، ۲۰۲۱).

(القحطانی و پاول^{۱۰}، ۲۰۱۶) تأکید می کنند که دانش آموزان ابزارهای فناوری دیجیتال را به واسطه ای برای حل فعالیت ها تبدیل می کنند و به کمک آن دانش لازم در جهت استفاده از آن توسعه می دهند. با این حال، برخی مشکلات یادگیری در درس مثلثات شامل دشواری در ایجاد ارتباط میان نمایش های مختلف مفاهیم و تفسیر نمودارها است (الیا و اسپرو^{۱۱}، ۲۰۰۶).

با وجود اهمیت توابع مثلثاتی و گسترش استفاده از فناوری های دیجیتال، پژوهش های کمی که به طور مشخص اثر ادغام مدل سازی ریاضی و فناوری دیجیتال را بر عملکرد دانش آموزان در این مبحث بررسی کنند، همچنان محدود بوده و نسبت به سایر حوزه های آموزش ریاضی کمتر مورد توجه قرار گرفته اند (ماووس و اوگونای، ۲۰۲۱). از این رو، هدف پژوهش حاضر بررسی تأثیر ادغام فناوری دیجیتال (نرم افزار GeoGebra) و فعالیت های مدل سازی ریاضی بر عملکرد دانش آموزان در یادگیری توابع مثلثاتی در سطوح فنی و مدل سازی است.

بر این اساس، سؤال اصلی پژوهش به صورت زیر مطرح می شود: «آیا مداخله آموزشی تلفیقی مبتنی بر فعالیت های مدل سازی ریاضی با استفاده از نرم افزار GeoGebra موجب بهبود معنادار عملکرد دانش آموزان در یادگیری توابع مثلثاتی در سطوح فنی و سطوح مفهومی مدل سازی می شود؟»

با توجه به اهداف پژوهش حاضر، سه فرضیه اصلی مطرح شد: ۱. آموزش تلفیقی مبتنی بر فعالیت های مدل سازی ریاضی با استفاده از نرم افزار GeoGebra موجب بهبود معنادار سطوح فنی دانش آموزان در استفاده از فناوری دیجیتال می شود.

۲. آموزش تلفیقی مبتنی بر فعالیت های مدل سازی ریاضی با استفاده از نرم افزار GeoGebra موجب بهبود معنادار سطوح درک مفهومی دانش آموزان از مدل سازی توابع مثلثاتی می شود.

۳. در گروه آزمایش، تفاوت معناداری بین اثر فناوری دیجیتال (GeoGebra) و فعالیت های مدل سازی ریاضی بر یادگیری دانش آموزان مشاهده نشد و هر دو مداخله آموزشی اثر مشابهی بر ارتقای سطوح فنی و درک مفهومی داشته اند.

7. Darmanova et al
8. Bilgili & Çiltaş,
9. Mosese & Ogbonnaya
10. Alqahtani & Powell
11. Elia & Spiro

1. Krawitz et al
2. Shonbrodt et al
3. van Dijke-Droogers
4. Ghosh
5. Büscher & Schnell
6. Patel & Pfannkuch

روش

طرح تحقیق و شرکت‌کنندگان

در این پژوهش، مداخله آموزشی به صورت تلفیقی طراحی و اجرا شد؛ به گونه‌ای که فعالیت‌های مدل‌سازی ریاضی هسته اصلی آموزش را تشکیل می‌دادند و نرم‌افزار GeoGebra به عنوان یک ابزار شناختی و نمایشی در خدمت فرایند مدل‌سازی به کار گرفته شد. به طوری که هر دو با هم ارزش آموزشی یکپارچه‌ای ایجاد می‌کنند. از این رو، فناوری دیجیتال در این مطالعه به عنوان مداخله‌ای مستقل تلقی نمی‌شود، بلکه نقشی میانجی در حمایت از درک مفهومی، ساخت و بازنگری مدل‌های ریاضی ایفا می‌کند. تمامی فعالیت‌های آموزشی گروه آزمایش بر پایه این رویکرد تلفیقی طراحی شده‌اند.

این پژوهش از نظر هدف کاربردی و از نظر روش‌شناسی از نوع آمیخته با غلبه رویکرد کمی است که با رویکرد هم‌زمان (Concurrent Mixed Methods) انجام شد. در بخش کمی، از طرح نیمه‌آزمایشی پیش‌آزمون-پس‌آزمون با دو گروه اصلی آزمایش و کنترل برای بررسی تأثیر مداخله آموزشی مبتنی بر مدل‌سازی ریاضی و فناوری دیجیتال بر عملکرد دانش‌آموزان استفاده شد.

به طور هم‌زمان، داده‌های کیفی به صورت مکمل و با هدف تبیین عمیق‌تر نتایج کمی، فرآیند یادگیری، میزان تعامل دانش‌آموزان و چگونگی شکل‌گیری پیدایش ابزاری (Instrumental Genesis) از طریق مصاحبه‌های منتخب و مشاهدات کلاسی گردآوری و تحلیل شدند. تلفیق داده‌های کمی و کیفی امکان تفسیر جامع‌تر یافته‌ها و درک عمیق‌تر تأثیر مداخله آموزشی را فراهم ساخت.

جامعه آماری این پژوهش شامل کلیه دانش‌آموزان پایه یازدهم دو دبیرستان دولتی در شهر تهران بود که مطابق برنامه درسی رسمی وزارت آموزش و پرورش آموزش می‌دیدند. به منظور تعیین حجم نمونه، از جدول مورگان استفاده شد.

با توجه به محدودیت‌های آموزشی، انتخاب مدارس و کلاس‌ها به صورت در دسترس انجام شد و امکان تصادفی‌سازی کامل در سطح فردی وجود نداشت؛ از این رو، طراحی پژوهش از نوع نیمه‌آزمایشی تلقی می‌شود. با این حال، در حد امکان تلاش شد گروه‌های آزمایش و کنترل از نظر ویژگی‌های اولیه براساس نتایج پیش‌آزمون هم‌ارز باشند.

بر این اساس، ۱۴۲ دانش‌آموز در گروه آزمایش و ۱۳۴ دانش‌آموز در گروه کنترل انتخاب شدند. با توجه به غیبت تعدادی از دانش‌آموزان در مراحل اجرای پژوهش، نمونه نهایی شامل ۱۳۲ دانش‌آموز در گروه آزمایش و ۱۳۸ دانش‌آموز در گروه کنترل بود. هر

یک از گروه‌ها شامل چهار کلاس (دو کلاس از هر مدرسه) بودند. جزئیات توزیع نمونه اولیه و نهایی دانش‌آموزان در گروه‌های آزمایش و کنترل در جدول ۱ ارائه شده است.

اگرچه گروه آزمایش و گروه کنترل هر یک شامل چند کلاس (که در جدول ۲ با عناوینی مانند آزمایش ۱ و آزمایش ۲ و ... مشخص شده‌اند) بودند، تمامی کلاس‌های گروه آزمایش مداخله آموزشی تلفیقی یکسان و تمامی کلاس‌های گروه کنترل یک روش آموزشی یکسان دریافت کردند. این تقسیم‌بندی صرفاً به منظور مدیریت اجرایی کلاس‌ها بوده و به معنای وجود مداخلات متفاوت نبوده است.

جدول ۱. توزیع نمونه پژوهش در گروه‌های آزمایش و کنترل

گروه	تعداد اولیه دانش‌آموزان	تعداد نهایی دانش‌آموزان	تعداد کلاس‌ها
آزمایش	۱۴۲	۱۳۲	۴
کنترل	۱۳۴	۱۳۸	۴
جمع	۲۷۶	۲۷۰	۸

لازم به ذکر است که مدارس مورد بررسی از نظر امکانات فناوری محدودیت‌هایی داشتند و استفاده از نرم‌افزار GeoGebra در آزمون‌های رسمی مجاز نبود. ابزار پژوهشی در این مطالعه جهت بررسی هدف تحقیق به دو صورت بوده است. به منظور گردآوری داده‌های کمی، آزمون‌هایی که هر کدام شامل یک فعالیت مدل‌سازی که به طور ویژه توسط نویسنده طراحی شده بودند استفاده گردید و دانش‌آموزان برای تکمیل هر فعالیت مدل‌سازی ۶۰ دقیقه فرصت داشتند. یکی برای پیش‌آزمون با عنوان «تعیین زاویه بهینه لنگر کشتی باربری» و دیگری برای پس‌آزمون با عنوان «تحلیل نوار قلب با استفاده از توابع سینوسی». نوع سؤالات آزمون، مسئله‌محور و مبتنی بر مدل‌سازی ریاضی بود و دامنه نمره‌دهی هر سؤال از ۱ تا ۵ تعیین شد. نتایج آزمون‌ها بر اساس پنج سطح مهارت فنی در استفاده از GeoGebra تحلیل شدند: عدم استفاده، استفاده محدود، در حال توسعه، با تجربه و خبره/فهمیم. این سطوح مهارت فنی دانش‌آموزان در استفاده از نرم‌افزار GeoGebra در جدول ۲ ارائه شده است. همچنین، سطوح درک فعالیت‌های مدل‌سازی ریاضی در جدول ۳ نشان داده شده‌اند که شامل استدلال نادرست، استدلال شهودی، استدلال کلامی، استدلال انتقالی، استدلال یکپارچه می‌باشند. هر دو سطح براساس چارچوب سواد فناوری و مدل‌سازی ارائه شده توسط ون دایک-دروگزر، دریوزر و بکر (۲۰۲۱) تعیین گردیدند.

جدول ۲. سطوح فنی برای استفاده از جئوجبرا

مرحله	توضیحات
۱	دانش آموزان قادر به اجرای تکنیک های جئوجبرا نیستند.
۲	دانش آموزان تکنیک ها را با دنبال کردن دستورالعمل ها گام به گام انجام می دهند؛ هنوز با تردید عمل می کنند و اغلب به صورت آزمون و خطا یا امتحان کردن کار می کنند.
۳	دانش آموزان تکنیک ها را در بیشتر مواقع با پیروی از دستورالعمل ها انجام می دهند؛ اشتباهات ممکن است رخ دهد ولی اصلاح می شوند.
۴	دانش آموزان تکنیک های صحیح را روان، سریع و بدون اشتباه انجام می دهند و گاهی تکنیک های جدید را کشف می کنند.
۵	دانش آموزان برای تکنیک های جئوجبرا درست تصمیم گیری می کنند.

جدول ۳. سطوح مفهومی درک مدلسازی ریاضی

سطح	توضیحات
استدلال نادرست	استفاده غلط از مفاهیم و روابط مثلثاتی بدون انطباق با مسئله واقعی
استدلال شهودی	آشنایی سطحی با نمادها و مفاهیم مثلثاتی، اما کاربرد ناهماهنگ یا نادرست آن ها در مدل سازی
استدلال کلامی	توانایی توضیح لفظی مفاهیم مثلثاتی بدون به کارگیری مؤثر در ساخت یا تفسیر مدل
استدلال انتقالی	شناسایی برخی مؤلفه های مدل مثلثاتی (مانند دامنه یا دوره) بدون یکپارچه سازی کامل آن ها
استدلال یکپارچه	درک منسجم از مدل سازی مثلثاتی و ارتباط مؤثر بین نمایش های مختلف و پدیده واقعی

کدهای استخراج شده از مصاحبه ها نشان داد که ضریب کاپا برابر ۰/۷۸۰ است، که بیانگر پایایی قابل قبول داده های کیفی می باشد.

مداخله آموزشی

طبق نظر (ایکرت و نیلسون^۱، ۲۰۲۲) تحقیقات نشان می دهد که معلمان در ریاضیات باید تلاش کنند تا یک تمرین آموزشی ایجاد کنند که بر مشارکت فعال دانش آموزان بنا شود و آنها را تشویق کند تا استدلال خود را توسعه دهند و به اشتراک بگذارند. در این خصوص مداخله آموزشی را طوری طراحی کردیم که دانش آموزان در فعالیت های گروهی بتوانند استدلال های خود را به اشتراک بگذارند و درک مفهومی شان از مسائل مثلثاتی ارتقا پیدا کند. دانش آموزان گروه آزمایش، آموزش توابع مثلثاتی را از طریق فعالیت های مدل سازی ریاضی مبتنی بر نرم افزار GeoGebra در طی جلسات مداخله آموزشی دریافت کردند، درحالی که گروه کنترل، آموزش را به روش سنتی و بدون استفاده از فناوری گذراندند. مداخله آموزشی شامل سه فعالیت مدل سازی طی پنج جلسه آموزشی (دو جلسه مقدماتی و سه جلسه فعالیت های گروهی و فردی) بود.

علاوه بر داده های کمی، داده های کیفی نیز جمع آوری شد تا مسیر یادگیری و درک مفهومی دانش آموزان در فعالیت های مدل سازی ریاضی بررسی شود. این داده ها از طریق مصاحبه های فردی و گروهی و مشاهدات کلاسی توسط معلم در حین حل مسائل مدل سازی گردآوری شدند. تحلیل داده های کیفی امکان تبیین عمیق تر روند یادگیری و میزان تعامل دانش آموزان با فعالیت های آموزشی را فراهم ساخت.

روایی و پایایی ابزارها:

روایی محتوایی آزمون ها توسط سه نفر از متخصصان آموزش ریاضی تأیید شد. پایایی آزمون های کمی با استفاده از ضریب آلفای کرونباخ ($\alpha = 0.91$) در پیش آزمون و پس آزمون قابل قبول گزارش گردید.

در بخش کیفی، تحلیل داده ها به صورت کدگذاری مستقل توسط پژوهشگر و دو متخصص دانشگاهی انجام شد و حدود ۸۴٪ از کدها با یکدیگر اشتراک داشتند. همچنین، بررسی پایایی بین

فعالیت ۲: تعیین موقعیت مناسب نردبان آتش‌نشانی در ساختمان
با در نظر گرفتن ارتفاع، زمان و سرعت.

- هدف: توسعه مهارت مدل‌سازی توابع مثلثاتی برای حل مسائل واقعی.

- مراحل: تحلیل مسئله، ساخت مدل ریاضی و بررسی پاسخ.
- استفاده از GeoGebra: طراحی مدل و محاسبه موقعیت بهینه.

فعالیت ۳: طراحی پنجره‌های بیمارستان برای مشاهده فضای بیرون با کمترین حرکت سر با در نظر گرفتن هزینه، تعداد طبقات و ارتفاع هر طبقه.

- هدف: تمرین مهارت یکپارچه‌سازی مدل‌سازی و تصمیم‌گیری عملی.

- مراحل: شناسایی متغیرها، ایجاد مدل و تحلیل نتایج.
- استفاده از GeoGebra: رسم مدل‌های هندسی محاسبه زوایا.

در ادامه نمودار ۱ نمایی یکپارچه از طراحی پژوهش حاضر را ارائه می‌دهد و ارتباط بین نوع طرح تحقیق، شرکت کنندگان، مراحل اجرای مداخله آموزشی و زمان‌بندی پیش‌آزمون و پس‌آزمون را به صورت خلاصه نشان می‌دهد.

هر درس با یک ارزیابی روزانه کاغذ و مداد پایان یافت، اگرچه این ارزیابی‌ها بر نمره نهایی تأثیر نداشتند، ولی بر روند کار برای داده‌های کیفی تأثیر داشتند. تمامی فعالیت‌های مدل‌سازی توسط نویسنده اول طراحی شدند و تدریس برعهده نویسنده اول و یک مدرس به‌عنوان همکار بود که پیشتر آموزش دیده و با نرم‌افزار GeoGebra آشنا بود. دانش‌آموزان در گروه‌های سه‌نفره به تحلیل مسئله، ساخت مدل، شبیه‌سازی و بازنگری آن پرداختند. معلم نقش تسهیل‌گر را برعهده داشت. دانش‌آموزان در پایان هر درس به تأمل درباره فعالیت‌ها تشویق شدند. یافته‌های جدول ۴ نشان‌دهنده تقسیم‌بندی دانش‌آموزان در گروه‌های آزمایش و کنترل و نحوه حضورشان در آزمون‌ها و فعالیت‌های مدل‌سازی می‌باشد. علامت ✓ اجرای آن فعالیت را در کلاس نشان می‌دهد.

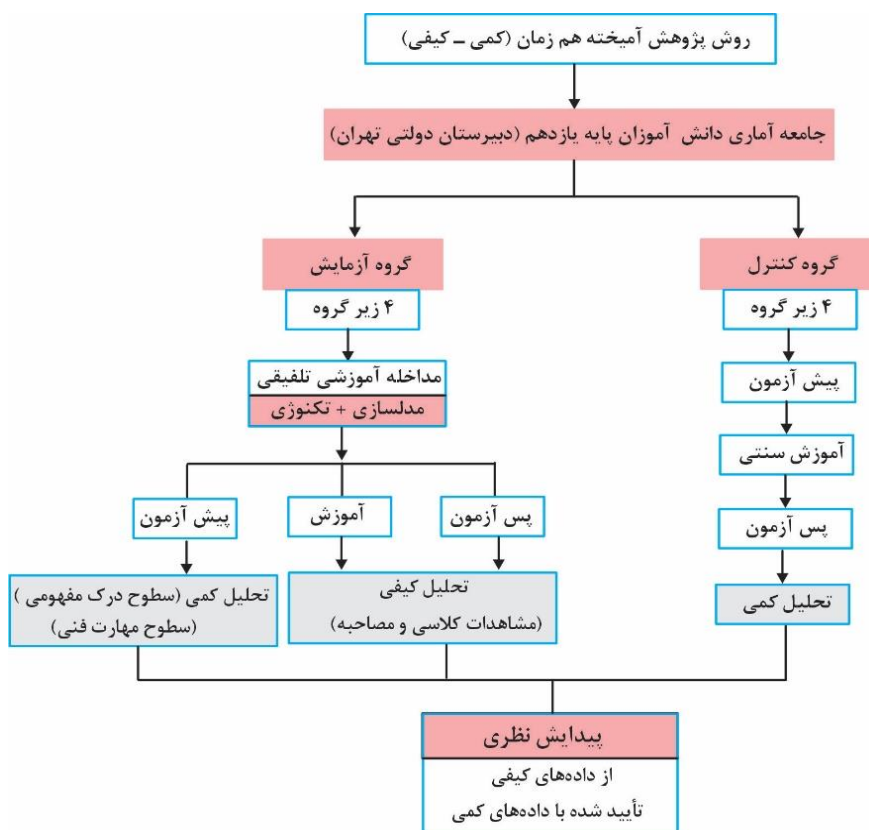
فعالیت‌های مدل‌سازی و نقش GeoGebra:

فعالیت ۱: بررسی نمودارهای تشعشعات الکترومغناطیسی و تحلیل ارتباط آن‌ها با توابع سینوسی.

- هدف: ارتقای درک مفهومی توابع سینوسی.
- مراحل: مشاهده و تحلیل نمودارها و رسم مدل‌های ریاضی.
- استفاده از GeoGebra: رسم نمودارها و مشاهده اثر تغییرات دامنه تابع مثلثاتی.

جدول ۴. تنظیمات اجرای مداخله آموزشی

کلاس	پیش‌آزمون	پس‌آزمون	فعالیت مدل‌سازی (۱)	فعالیت مدل‌سازی (۲)	فعالیت مدل‌سازی (۳)
گروه آزمایش (۱)	✓	✓	✓	✓	✓
گروه آزمایش (۲)	✓	✓	✓	✓	✓
گروه آزمایش (۳)	✓	✓	✓	✓	✓
گروه آزمایش (۴)	✓	✓	✓	✓	✓
گروه کنترل (۱)	✓	✓			
گروه کنترل (۲)	✓	✓			
گروه کنترل (۳)	✓	✓			
گروه کنترل (۴)	✓	✓			
مجموع	۲۷۰	۲۷۰	۱۳۲	۱۳۲	۱۳۲



نمودار ۱. نمودار طراحی پژوهش و مراحل اجرای مداخله آموزشی

یافته های توصیفی

یافته های توصیفی مربوط به عملکرد دانش آموزان در پیش آزمون و پس آزمون، به تفکیک گروه های کنترل و آزمایش، در جداول ۵ و ۸ ارائه شده است. همان طور که در این جداول مشاهده می شود، میانگین عملکرد دانش آموزان در گروه کنترل تقریباً ثابت مانده است، در حالی که در گروه آزمایش، میانگین عملکرد پس از مداخله به طور قابل توجهی افزایش یافته است. انحراف معیارها نشان دهنده پراکندگی متوسط داده ها و مقادیر چولگی و کشیدگی نزدیک صفر نشان دهنده تقریباً نرمال بودن توزیع داده ها است. در ادامه، توضیح مفصل هر جدول ارائه شده و تغییرات میانگین ها و شاخص های آماری به تفصیل تحلیل می شوند.

به طور خلاصه، این نتایج بیانگر آن است که مداخله آموزشی (فناوری دیجیتال و فعالیت های مدل سازی ریاضی) باعث افزایش قابل توجه عملکرد دانش آموزان در گروه آزمایش شده، در حالی که گروه کنترل تغییر چشمگیری نشان نداده است.

شیوه تحلیل داده ها

در این پژوهش، داده های جمع آوری شده با استفاده از آمار توصیفی (فراوانی، میانگین و انحراف معیار) و آمار استنباطی (آزمون کوواریانس تک متغیره) تحلیل شده اند. تجزیه و تحلیل داده ها با نرم افزار SPSS26 و در سطح معناداری ۰/۰۵ انجام شده است. یافته ها در دو بخش ارائه شده است: تحلیل توصیفی و تحلیل استنباطی.

برای تجزیه و تحلیل داده های کیفی به منظور بررسی فرآیند یادگیری و تعامل دانش آموزان، ۲۰ مصاحبه فردی و گروهی به همراه مشاهدات کلاسی توسط پژوهشگر انجام شد. هر مصاحبه حدود ۲۰-۳۰ دقیقه طول کشید و نیمه ساختاری بود. پژوهشگر کدگذاری اولیه انجام داد و بخش های مرتبط با تعامل و فرآیند یادگیری دانش آموزان را استخراج کرد تا مضامین اصلی شناسایی شوند. یافته ها به صورت توضیحی و با نقل قول های منتخب ارائه شد تا روند یادگیری و توسعه مفهومی دانش آموزان در طول جلسات به دقت منعکس شود.

یافته‌های استنباطی

در ادامه استفاده از آزمون آنالیز کوواریانس تک‌متغیره در دو گروه کنترل و آزمایش مقایسه شده است و بررسی فرضیات صورت گرفته است.

بررسی فرضیات تحقیق

فرضیه اول: آموزش تلفیقی مبتنی بر فعالیتهای مدل‌سازی ریاضی با استفاده از نرم‌افزار GeoGebra موجب بهبود معنادار سطوح فنی دانش‌آموزان در استفاده از فناوری دیجیتال می‌شود.

میانگین متغیرهای تحقیق

جدول ۵. آماره‌های توصیفی عملکرد دانش‌آموزان در سطوح فنی پیش‌آزمون و پس‌آزمون با فناوری دیجیتال (فرضیه اول)

گروه	عملکرد دانش‌آموزان	تعداد	کمترین مقدار	بیشترین مقدار	میانگین	انحراف معیار	چولگی	کشیدهی
کنترل	پیش‌آزمون	۱۳۸	۱	۵	۲/۴۱۳	۱/۰۹۲	۰/۴۱۳	-۰/۴۱۲
	پس‌آزمون	۱۳۸	۱	۵	۲/۴۳۵	۱/۰۷۴	۰/۳۵۱	-۰/۴۸۴
آزمایش	پیش‌آزمون	۱۳۲	۱	۵	۲/۳۸۶	۱/۱۵۷	۰/۴۰۲	-۰/۶۸۲
	پس‌آزمون	۱۳۲	۱	۵	۳/۸۰۳	۱/۰۹۴	-۰/۶۲۹	-۰/۳۶۴

یافته‌های جدول ۵ نشان‌دهنده آماره‌های توصیفی عملکرد دانش‌آموزان مرتبط با فرضیه اول و مداخله با روش فناوری دیجیتال است. در گروه کنترل، میانگین عملکرد دانش‌آموزان قبل و بعد از مداخله تقریباً ثابت بوده است (قبل ۲/۴۱۳، بعد ۲/۴۳۵)، که نشان می‌دهد مداخله‌ای در عملکرد آن‌ها رخ نداده است. در گروه آزمایش، میانگین عملکرد دانش‌آموزان پس از مداخله به‌طور قابل توجهی افزایش یافته است (قبل ۲/۳۸۶، بعد ۳/۸۰۳)، که نشان‌دهنده تأثیر مثبت مداخله

فناوری دیجیتال بر عملکرد دانش‌آموزان است. انحراف معیار نشان می‌دهد پراکندگی داده‌ها متوسط و مشابه بین گروه‌هاست. مقادیر چولگی و کشیدهی نزدیک صفر هستند، که حاکی از تقریباً نرمال بودن توزیع داده‌ها است. در واقع این نتایج بیانگر آن است که فناوری دیجیتال باعث افزایش قابل توجه عملکرد دانش‌آموزان در گروه آزمایش شده است، درحالی‌که گروه کنترل تغییر چندانی نداشته است.

جدول ۶. نتایج آزمون همگونی واریانس‌ها (آزمون لون) برای عملکرد دانش‌آموزان در سطوح فنی

متغیرهای تحقیق	آماره F	درجه آزادی ۱	درجه آزادی ۲	مقدار معناداری
عملکرد دانش‌آموزان	۱/۹۲۰	۱	۲۶۸	۰/۱۴۵

یافته‌های جدول ۶ نشان می‌دهند که همگونی واریانس‌ها بین گروه کنترل و آزمایش برای متغیر عملکرد دانش‌آموزان برقرار است. مقدار F برابر ۱/۹۲۰ و سطح معنی‌داری ۰/۱۴۵ است، که بزرگ‌تر از ۰/۰۵ می‌باشد؛ بنابراین فرض صفر مبنی بر برابری واریانس‌ها رد

نمی‌شود و می‌توان تحلیل‌های آماری پارامتریک (مثل ANCOVA) را با اطمینان انجام داد.

آنالیز کوواریانس تک‌متغیره

جدول ۷. نتایج آزمون آنالیز کوواریانس تک‌متغیره عملکرد دانش‌آموزان در سطوح فنی

متغیرهای تحقیق	مجموع مربعات	درجه آزادی	میانگین مربعات	آماره F	مقدار معناداری	اندازه اثر
عملکرد دانش‌آموزان	۱۳۰/۶۶	۱	۱۳۰/۶۶	۶۶۸/۵۹۲	۰/۰۰۰	۰/۷۱۵

یافته‌ها در جدول ۷ نشان می‌دهد که تفاوت عملکرد دانش‌آموزان بین گروه آزمایش و کنترل پس از مداخله معنادار است ($F = ۶۶۸/۵۹۲$ و $p < ۰/۰۰۱$). مقدار اندازه اثر ($\eta^2 = ۰/۷۱۵$) نشان‌دهنده اثر بسیار بزرگ مداخله بر عملکرد دانش‌آموزان است.

فرضیه دوم: آموزش تلفیقی مبتنی بر فعالیت‌های مدل سازی ریاضی با استفاده از نرم افزار GeoGebra موجب بهبود معنادار سطوح درک مفهومی دانش‌آموزان از مدل سازی توابع مثلثاتی می‌شود.

جدول ۸. آماره‌های توصیفی عملکرد دانش‌آموزان در سطوح مفهومی پیش‌آزمون و پس‌آزمون فعالیت‌های مدل سازی (فرضیه دوم)

گروه	عملکرد دانش‌آموزان	تعداد	کمترین مقدار	بیشترین مقدار	میانگین	انحراف معیار	چولگی	کشییدگی
کنترل	پیش آزمون	۱۳۸	۱	۵	۲/۲۵۴	۱/۰۶۱	۰/۳۳۲	-۰/۸۲۱
	پس آزمون	۱۳۸	۱	۵	۲/۲۵۴	۱/۰۱۹	۰/۳۹۷	-۰/۷۵۶
آزمایش	پیش آزمون	۱۳۲	۱	۵	۲/۳۵۶	۱/۱۳۳	۰/۵۰۷	-۰/۴۹۷
	پس آزمون	۱۳۲	۱	۵	۳/۸۴۹	۱/۰۸۱	-۰/۷۹۹	-۰/۰۶۹

نشان‌دهنده تأثیر مثبت فعالیت‌های مدل سازی ریاضی بر عملکرد دانش‌آموزان است. همچنین، انحراف معیار نشان می‌دهد که پراکندگی داده‌ها در گروه‌ها متوسط و مشابه بوده است و مقادیر چولگی و کشییدگی نزدیک صفر هستند، که بیانگر تقریباً نرمال بودن توزیع داده‌ها است. این نتایج حاکی از آن است که فعالیت‌های مدل سازی ریاضی باعث افزایش عملکرد دانش‌آموزان در گروه آزمایش شده‌اند، در حالی که گروه کنترل تغییری نشان نداده است.

جدول ۸ نشان‌دهنده آماره‌های توصیفی عملکرد دانش‌آموزان مرتبط با فرضیه دوم و مداخله با فعالیت‌های مدل سازی ریاضی است. در گروه کنترل، میانگین عملکرد دانش‌آموزان قبل و بعد از مداخله ثابت مانده است (۲/۲۵۴)، که نشان می‌دهد فعالیت‌های مدل سازی ریاضی تأثیری بر عملکرد گروه کنترل نداشته است. در گروه آزمایش، میانگین عملکرد دانش‌آموزان پس از مداخله به طور قابل توجهی افزایش یافته است (قبل ۲/۳۵۶، بعد ۳/۸۴۹)، که

جدول ۹. نتایج آزمون همگونی واریانس‌ها (آزمون لون) برای عملکرد دانش‌آموزان در سطوح مفهومی

متغیرهای تحقیق	آماره F	درجه آزادی ۱	درجه آزادی ۲	مقدار معناداری
عملکرد دانش‌آموزان	۲/۸۲۱	۱	۲۶۸	۰/۰۹۴

ANCOVA را با اطمینان انجام داد. چون مقدار معناداری برای نمرات متغیر عملکرد دانش‌آموزان بزرگ‌تر از ۰/۰۵ بدست آمده است بنابراین پیش فرض همگونی واریانس‌های دو گروه کنترل و آزمایش محقق شده است.

یافته‌ها در جدول ۹ نشان می‌دهد که واریانس‌ها بین گروه کنترل و آزمایش برای متغیر عملکرد دانش‌آموزان در سطوح مفهومی همگن هستند. مقدار F برابر ۲/۸۲۱ و سطح معنی‌داری ۰/۰۹۴ است که بزرگ‌تر از ۰/۰۵ می‌باشد. بنابراین فرض صفر مبنی بر برابری واریانس‌ها رد نمی‌شود و می‌توان تحلیل‌های پارامتریک مانند

آنالیز کوواریانس تک‌متغیره

جدول ۱۰. نتایج آزمون آنالیز کوواریانس تک‌متغیره عملکرد دانش‌آموزان در سطوح مفهومی

متغیرهای تحقیق	مجموع مربعات	درجه آزادی	میانگین مربعات	آماره F	مقدار معناداری	اندازه اثر
عملکرد دانش‌آموزان	۱۵۳/۰۳۱	۱	۱۵۳/۰۳۱	۶۶۱/۱۲۲	۰/۰۰۰	۰/۷۱۲

فرضیه سوم:

در این بخش، یافته‌های مربوط به فرضیه سوم ارائه می‌شود که با هدف مقایسه اثر دو نوع مداخله آموزشی در گروه آزمایش و بررسی وجود یا عدم وجود تفاوت معنادار بین آن‌ها بر عملکرد دانش‌آموزان انجام شد.

با توجه به جدول ۱۰، برای بررسی تأثیر مداخله مبتنی بر فعالیت‌های مدل‌سازی ریاضی، از آزمون آنالیز کوواریانس تک‌متغیره برای متغیر عملکرد دانش‌آموزان استفاده شد. این روش امکان کنترل اثر نمرات پیش‌آزمون و مقایسه تأثیر مداخله بین دو گروه کنترل و آزمایش را فراهم ساخت. همان‌طور که مشاهده می‌شود با کنترل اثر نمرات پیش‌آزمون، برای فاکتور گروه مقدار معناداری آزمون آنالیز کوواریانس برای شاخص عملکرد دانش‌آموزان کمتر از ۰/۰۵ (۰/۰۰۰) به دست آمد. بنابراین میانگین نمرات عملکرد دانش‌آموزان در ۲ گروه آزمایش و کنترل اختلاف معناداری دارد و مداخله در بهبود نمرات و سطوح عملکرد دانش‌آموزان تأثیر معنی‌داری داشته است.

جدول ۱۱. آماره‌های توصیفی متغیرهای فرضیه سوم: عملکرد دانش‌آموزان در پیش‌آزمون و پس‌آزمون در گروه آزمایش

روشی مداخله	گروه	عملکرد دانش‌آموزان	تعداد	کمترین مقدار	بیشترین مقدار	میانگین	انحراف معیار	چولگی	کشیدگی
فناوری دیجیتال	آزمایش	پیش‌آزمون	۱۳۲	۱	۵	۲/۳۸۶	۱/۱۵۷	۰/۴۰۲	-۰/۶۸۲
		پس‌آزمون	۱۳۲	۱	۵	۳/۸۰۳	۱/۰۹۴	-۰/۶۲۹	-۰/۳۶۴
مدلسازی ریاضی	آزمایش	پیش‌آزمون	۱۳۲	۱	۵	۲/۳۵۶	۱/۱۳۳	۰/۵۰۷	-۰/۴۹۷
		پس‌آزمون	۱۳۲	۱	۵	۳/۸۴۹	۱/۰۸۱	-۰/۷۹۹	-۰/۰۶۹

بهبود قابل توجه عملکرد دانش‌آموزان پس از مداخله است. انحراف معیار نشان می‌دهد که پراکندگی داده‌ها در هر دو نوع مداخله نسبتاً مشابه و متوسط بوده است. مقادیر چولگی و کشیدگی نزدیک صفر بوده و نشان‌دهنده تقریباً نرمال بودن توزیع داده‌ها است. نتایج حاکی از آن است که هر دو نوع مداخله آموزشی باعث افزایش عملکرد دانش‌آموزان در گروه آزمایش شده‌اند.

یافته‌ها در جدول ۱۱ نشان‌دهنده میانگین، انحراف معیار، چولگی و کشیدگی عملکرد دانش‌آموزان گروه آزمایش در دو نوع مداخله (فناوری دیجیتال و فعالیت‌های مدل‌سازی ریاضی) است. برای مداخله فناوری دیجیتال، میانگین عملکرد دانش‌آموزان از ۲/۳۸۶ در پیش‌آزمون به ۳/۸۰۳ در پس‌آزمون افزایش یافته است، که نشان‌دهنده تأثیر مثبت مداخله بر عملکرد دانش‌آموزان می‌باشد. برای فعالیت‌های مدل‌سازی ریاضی، میانگین عملکرد از ۲/۳۵۶ در پیش‌آزمون به ۳/۸۴۹ در پس‌آزمون افزایش یافته است، که حاکی از

همگونی واریانس‌ها

جدول ۱۲. نتایج آزمون همگونی واریانس‌ها (آزمون لون) برای متغیرهای تحقیق

متغیرهای تحقیق	آماره F	درجه آزادی ۱	درجه آزادی ۲	مقدار معناداری
عملکرد دانش‌آموزان	۰/۰۳۰	۱	۲۶۲	۰/۸۶۲

از ۰/۰۵ است، فرض همگونی واریانس‌ها برقرار بوده و استفاده از آزمون آنالیز کوواریانس تک‌متغیره برای تحلیل داده‌ها بلامانع است و می‌توان از آزمون‌های پارامتریک مانند ANCOVA استفاده کرد.

به‌منظور بررسی پیش‌فرض همگونی واریانس‌ها، از آزمون لون استفاده شد. یافته‌ها در جدول ۱۲ نشان داد که نتایج آزمون تفاوت معناداری بین واریانس گروه‌ها در متغیر عملکرد دانش‌آموزان وجود ندارد ($F = ۰/۰۳۰$ و $p = ۰/۸۶۲$). از آنجا که مقدار معناداری بزرگ‌تر

آنالیز کوواریانس تک متغیره

جدول ۱۳. نتایج آزمون آنالیز کوواریانس تک متغیره عملکرد دانش آموزان در سطوح فنی و مدل سازی

متغیرهای تحقیق	مجموع مربعات	درجه آزادی	میانگین مربعات	آماره F	مقدار معناداری	اندازه اثر
عملکرد دانش آموزان	۰/۳۲۰	۱	۰/۳۲۰	۰/۹۱۷	۰/۳۳۹	۰/۰۴۴

به منظور بررسی فرضیه سوم، مبنی بر تفاوت اثر فناوری دیجیتال و فعالیت های مدل سازی ریاضی در گروه آزمایش، از آزمون آنالیز کوواریانس تک متغیره استفاده شد. نتایج با توجه به یافته های جدول ۱۳ نشان داد که تفاوت اثر دو نوع مداخله آموزشی بر عملکرد دانش آموزان معنادار نیست ($F=0/917$ و $p=0/339$) و اندازه اثر $\eta^2 = 0/044$ نشان می دهد که بیانگر اثر کوچک بر عملکرد دانش آموزان است. بنابراین، می توان نتیجه گرفت که هر دو نوع مداخله آموزشی اثر مشابهی بر عملکرد دانش آموزان داشته اند.

یافته های کیفی

برای بررسی تحلیل فرآیند یادگیری، درک مفهومی و بازخوردهای دانش آموزان در کلاس های مداخله ای، ۲۰ فایل کاربرگ دانش آموزان به همراه مصاحبه های آنان از دو کلاس مورد بررسی قرار گرفت. در این مرحله، پژوهشگران ابتدا کدگذاری اولیه را انجام دادند؛ داده ها دسته بندی و سازمان دهی شدند و سپس کدهای اولیه به تعداد کمتری از کدهای شفاف تر تقلیل یافتند. در ادامه، کدهای پایه، مفاهیم فرعی و مفاهیم اصلی در هر گروه شناسایی و در قالب مضامین سازمان دهی گردیدند.

یافته های کیفی نشان دادند که دانش آموزان در فرایند یادگیری مبتنی بر مدل سازی ریاضی و فناوری دیجیتال، الگوهای رفتاری و شناختی مشخصی از خود بروز دادند. سه مقوله اصلی در این تحلیل شناسایی شد که در نمودار ۲ نمایش داده شده است:

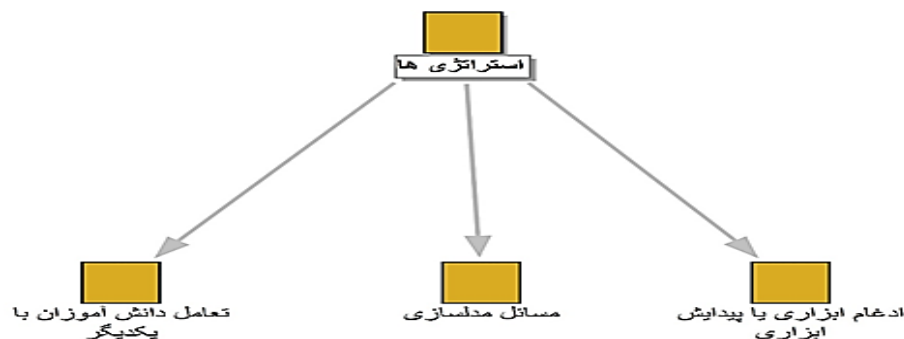
تعامل دانش آموزان با یکدیگر: همکاری گروهی، مشارکت فعال و اعتماد به نفس در حل مسائل، نشان دهنده نقش مهم تعامل اجتماعی در تقویت فرایند یادگیری بود.

مسائل مدل سازی: درگیری با مسائل مدل سازی ریاضی، ارتباط مفاهیم با موقعیت های واقعی و استفاده از روش های حل مسئله جذاب و کارآمد، موجب تعمیق درک مفهومی در دانش آموزان شد. ادغام یا پیدایش ابزاری: استفاده فعال از فناوری دیجیتال، مشارکت در بحث ها و پروژه های گروهی، و پاسخگویی داوطلبانه در کلاس نشان داد که فناوری به بخشی جدایی ناپذیر از تفکر و حل مسئله دانش آموزان تبدیل شده است.

این سه بعد به صورت یکپارچه فرایند یادگیری فعال و هدفمند را تقویت می کنند و یافته های کیفی به طور کلی نتایج حاصل از تحلیل های کمی را تأیید می کنند.

به طور کلی، یافته های کیفی نتایج به دست آمده از تحلیل های کمی را تأیید کرده و نشان می دهد که به کارگیری مدل سازی ریاضی همراه با فناوری دیجیتال، علاوه بر بهبود

نمودار سلسله مراتبی درختی



نمودار ۲. ساختار مفهومی استراتژی های یادگیری دانش آموزان در کلاس های مداخله آموزشی

نتیجه‌گیری و بحث

نتایج پژوهش حاضر با عنوان «بررسی تأثیر آموزش تلفیقی مدل‌سازی ریاضی و نرم‌افزار GeoGebra بر عملکرد دانش‌آموزان در یادگیری توابع مثلثاتی: یک مطالعه آمیخته» نشان داد که به‌کارگیری رویکردهای آموزشی مبتنی بر فناوری دیجیتال و فعالیت‌های مدل‌سازی ریاضی، تأثیر معنادار و چشمگیری بر بهبود عملکرد دانش‌آموزان داشته است. همچنین یافته‌های تحلیل کوواریانس نشان داد که با کنترل اثر نمرات پیش‌آزمون، عملکرد دانش‌آموزان گروه آزمایش در هر دو مداخله به‌طور معناداری بالاتر از گروه کنترل بوده و اندازه اثر بزرگ به‌دست آمده، حاکی از اهمیت آموزشی این مداخلات است. در مقابل، عدم تغییر معنادار در عملکرد گروه کنترل نشان می‌دهد که آموزش سنتی به‌تنهایی قادر به ایجاد بهبود معنادار در یادگیری مفاهیم مثلثاتی نبوده است.

از طرفی نتایج نشان دادند که به‌کارگیری فعالیت‌های مدل‌سازی ریاضی، با قرار دادن دانش‌آموزان در موقعیت‌های مسئله‌محور و مبتنی بر موقعیت‌های واقعی، موجب فعال‌سازی فرایندهای شناختی عمیق‌تری نسبت به روش‌های سنتی آموزش می‌شود. در این چارچوب، استفاده از نرم‌افزار GeoGebra به‌عنوان یک ابزار دیجیتال پویا، امکان مشاهده، دستکاری متغیرها و بازبینی مستمر مدل‌ها را برای دانش‌آموزان فراهم کرد و به آن‌ها کمک نمود تا ارتباط معناداری میان نمایش‌های مختلف توابع مثلثاتی برقرار کنند. در همین راستا، مطالعه‌ی (عثمان و همکاران^۱، ۲۰۲۴) با عنوان استفاده از ابزارهای دیجیتال گوناگون در فرایند طراحی و حل مسائل مدل‌سازی ریاضی نشان داد که ادغام ابزارهای دیجیتال مانند GeoGebra در مراحل طراحی و حل مسائل مدل‌سازی، موجب افزایش مؤثر توانایی‌های مدل‌سازی و عملکرد یادگیرندگان می‌شود که با نتایج پژوهش حاضر در بهبود یادگیری و درک مفهومی دانش‌آموزان مطابقت دارد.

همچنین این یافته‌ها با نتایج پژوهش‌هایی که بر نقش فناوری‌های تعاملی در تقویت درک مفهومی و یادگیری معنادار تأکید دارند، از جمله پژوهش‌های (لی و لی، ۲۰۲۴) و (فرد و همکاران، ۲۰۲۴) هم‌راستا است. یافته‌های (کویونکویا و دده^۲، ۲۰۲۴) نیز تأیید می‌کند که استفاده از ابزارهای دیجیتال در فعالیت‌های مدل‌سازی، به بهبود تحلیل، طراحی و تفسیر مدل‌های ریاضی کمک می‌کند.

در مقایسه با پژوهش‌های پیشین در حوزه مدل‌سازی ریاضی، نتایج این مطالعه تأیید می‌کند که مدل‌سازی نه‌تنها موجب بهبود عملکرد دانش‌آموزان در سطوح فنی می‌شود، بلکه نقش مهمی در تعمیق درک مفهومی آن‌ها از مفاهیم انتزاعی، از جمله توابع مثلثاتی، ایفا می‌کند. مواجهه دانش‌آموزان با مسائل زمینه‌مند و واقعی، انتقال از محاسبات صرف به فهم مفهومی را تسهیل می‌کند و موجب می‌شود مفاهیم ریاضی نه به‌عنوان مجموعه‌ای از فرمول‌های مجزا، بلکه به‌عنوان ابزارهایی برای تبیین و تحلیل پدیده‌های واقعی درک شوند. مطالعه‌ی (جواندی و همکاران^۳، ۲۰۲۵) نشان داد که یادگیری مبتنی بر GeoGebra موجب بهبود معنادار درک مفهومی دانش‌آموزان از تعاریف اولیه توابع مثلثاتی می‌شود، که این یافته با نتایج پژوهش حاضر در تقویت درک مفهومی با استفاده از ابزار دیجیتال هم‌راستا است. همچنین یافته‌های پژوهش حاضر در حوزه یادگیری مثلثات مبتنی بر مدل‌سازی زمینه‌مند همسو است که به بهبود معنادار درک مفهومی و توان حل مسئله دانش‌آموزان اشاره دارند (بوربا و همکاران^۴، ۲۰۲۵).

یافته‌های پژوهش حاضر با نتایج (فیرمانسیاه و همکاران^۵، ۲۰۲۴) همسو است. آن‌ها نشان دادند آموزش مبتنی بر مدل‌سازی ریاضی زمینه‌مند در یادگیری مثلثات موجب بهبود درک مفهومی و مهارت حل مسئله دانش‌آموزان می‌شود. پژوهش حاضر نیز تأیید می‌کند که ادغام فعالیت‌های مدل‌سازی با ابزار دیجیتال GeoGebra، امکان مشاهده، دستکاری متغیرها و بازنمایی مفاهیم را فراهم کرده و یادگیری مفهومی و مهارت‌های مدل‌سازی دانش‌آموزان را تعمیق می‌بخشد.

از منظر نظری، نتایج این پژوهش را می‌توان در چارچوب نظریه پیدایش ابزاری تبیین کرد. شواهد این فرایند عمدتاً از تحلیل داده‌های کیفی، شامل مشاهدات کلاسی و مصاحبه‌های منتخب، به‌دست آمد؛ نشان داده شد که دانش‌آموزان در جریان فعالیت‌های مدل‌سازی، به‌تدریج از استفاده‌های سطحی از GeoGebra فراتر رفته و این ابزار را به بخشی از فرایند تفکر، استدلال و بازبینی مدل‌های ریاضی تبدیل کردند. یافته‌های کمی پژوهش، از طریق نشان دادن بهبود معنادار در عملکرد یادگیری، ارتقای سطوح مهارت فنی و درک فعالیت‌های مدل‌سازی، پیامدهای قابل مشاهده این فرایند را تأیید می‌کنند.

آموزش مثلثات تحقق بخشند و یادگیری فعال، تعاملی و مفهومی را تقویت کنند.

علاوه بر یافته های کمی، نتایج حاصل از داده های کیفی نشان داد که رویکرد آموزشی مبتنی بر مدل سازی و فناوری دیجیتال موجب افزایش تعامل و همکاری دانش آموزان در کلاس درس شده است. فعالیت های گروهی در حل مسائل مدل سازی شده و بحث و گفت و گو پیرامون نتایج به دست آمده، فرصت هایی برای تبادل ایده ها، بازاندیشی و اصلاح درک مفهومی فراهم کرده است. این یافته ها با پژوهش های پیشین در زمینه استفاده از فناوری در آموزش ریاضی همسو است؛ مطالعات نشان داده اند که ادغام ابزارهای دیجیتال مانند GeoGebra محیط های یادگیری را تعاملی می کند و موجب افزایش درگیری فعال، همکاری و تعامل بین دانش آموزان می شود (سیریگار^۴، ۲۰۲۵)

در مجموع، نتایج پژوهش حاضر نشان می دهد که تلفیق آموزش مبتنی بر مدل سازی ریاضی و فناوری دیجیتال می تواند به عنوان رویکردی مؤثر در آموزش مفاهیم مثلثاتی مورد استفاده قرار گیرد. این رویکرد نه تنها موجب بهبود عملکرد و درک مفهومی دانش آموزان می شود، بلکه زمینه را برای تقویت استدلال ریاضی، مشارکت فعال و همکاری مؤثر در کلاس درس فراهم می آورد. بر این اساس، پیشنهاد می شود برنامه ریزان درسی و معلمان ریاضی با طراحی فعالیت های مدل سازی غنی، فراهم آوردن مسائل واقعی و موقعیت های مسئله محور، و بهره گیری هدفمند از ابزارهای دیجیتال تعاملی مانند GeoGebra، شرایط لازم برای ارتقای کیفیت آموزش ریاضی را فراهم کنند. همچنین، تأکید بر بازخورد مستمر و تعامل فعال دانش آموزان می تواند به تقویت درک مفهومی، توان حل مسئله و مهارت های استدلال ریاضی آنان کمک کند. علاوه بر این، تدوین دوره های آموزشی و کارگاه های حرفه ای برای معلمان، به منظور آشنایی با روش های مدل سازی و فناوری های دیجیتال، می تواند اجرای مؤثر این رویکردها را تسهیل کند.

حامی مالی

کلیه ی هزینه های پژوهش حاضر توسط نویسندگان مقاله تأمین شده است.

افزون بر تأیید چارچوب نظری موجود، یافته های پژوهش حاضر نشان می دهد که در یک طراحی آموزشی تلفیقی، که در آن مدل سازی ریاضی هسته اصلی فعالیت ها را تشکیل می دهد، فرایند پیدایش ابزاری نه به صورت مستقل، بلکه در تعامل پویا با چرخه های مدل سازی شکل می گیرد. این تعامل به گسترش مفهوم پیدایش ابزاری در آموزش ریاضی مبتنی بر مدل سازی با حمایت فناوری دیجیتال کمک می کند و نشان می دهد که ابزار دیجیتال، فراتر از یک وسیله صرف، به بخشی از فرایند تفکر و حل مسئله دانش آموزان تبدیل می شود. نتایج پژوهش های اخیر نشان داده اند که به کارگیری نرم افزار GeoGebra همراه با رویکردهای آموزشی فعال و تعاملی می تواند درگیری فعال دانش آموزان، تعامل کلاسی و درک مفهومی را به طور معناداری افزایش دهد، زیرا این ابزار امکان تعامل و انعکاس مفاهیم هندسی را برای دانش آموزان فراهم می آورد همان طور که (گرمو^۱ و همکاران، ۲۰۲۴) گزارش کرده اند.

یکی دیگر از یافته های مهم پژوهش حاضر، عدم وجود تفاوت معنادار بین میزان تأثیر آموزش مبتنی بر فناوری دیجیتال و فعالیت های مدل سازی ریاضی بر عملکرد دانش آموزان بود. این نتیجه نشان می دهد که هر دو رویکرد آموزشی، علی رغم تفاوت در ماهیت اجرا، بر اصول مشترکی همچون یادگیری فعال، کاوش، استفاده از بازنمایی های چندانگانه و درگیری شناختی عمیق استوار هستند و می توانند به طور مشابه موجب بهبود عملکرد دانش آموزان شوند.

علاوه بر این، پژوهش های پیشین نشان داده اند که تشویق دانش آموزان به ارائه چند راه حل برای مسائل واقعی می تواند به طور غیرمستقیم باعث افزایش خودکارآمدی در ریاضیات شود (شوکاجلو و همکاران^۲، ۲۰۱۹). این یافته ها با نتایج پژوهش حاضر که نشان دهنده ی بهبود باورهای توانایی حل مسئله در جریان فعالیت های مدل سازی ریاضی و فناوری دیجیتال است، همسو می باشد.

این یافته با پژوهش (کویونکایا و دده^۳، ۲۰۲۴) همسو است که نشان داده اند استفاده از ابزارهای دیجیتال مختلف، از جمله GeoGebra، در طراحی و حل مسائل مدل سازی ریاضی، موجب بهبود قابل توجه یادگیری مفهومی و توان حل مسئله دانش آموزان می شود. به عبارت دیگر، همان طور که در پژوهش حاضر مشاهده شد، فناوری دیجیتال و فعالیت های مدل سازی ریاضی هر دو می توانند به عنوان مسیرهای مکمل، اهداف یادگیری مشابهی را در

ملاحظات اخلاقی

در جریان اجرای این پژوهش و تهیه‌ی مقاله کلیه‌ی قوانین کشوری و اصول اخلاقی حرفه‌ای مرتبط با پژوهش رعایت شده است.

مشارکت نویسندگان

مقاله پیش رو از رساله دکتری نویسنده اول که براساس آموزشی مبتنی بر مدل‌سازی ریاضی و فناوری دیجیتال برای تقویت استدلال و همکاری دانش‌آموزان در مثلثات بوده، استخراج شده است. دکتر محسن رستمی مال خلیفه و دکتر علی ایرانمنش به ترتیب اساتید راهنمای اول و دوم، دکتر محمد حسن بهزادی استاد مشاور را برعهده داشتند.

تشکر و قدردانی

از داوران محترم مجله که با دقت نظر، نقدهای سازنده و پیشنهادهای علمی خود در بهبود و تکمیل مقاله سهم بسزایی داشتند، قدردانی می‌کنم.

تعارض منافع

«هیچ گونه تعارضی با منافع افراد یا سازمانی ندارد.»

References

- Alqahtani, M. M., & Powell, A. B. (2016). Instrumental appropriation of a collaborative, dynamic-geometry environment and geometrical understanding. *International Journal of Education in Mathematics, Science and Technology*, 4(2), 72–83. <https://doi.org/10.18404/ijemst.38054>
- Allah Karami, A (2025). The Effect of Wordwall Artificial Intelligence on Agentic Engagement and Academic Performance of Elementary Students in Mathematics. *Technology and Scholarship in Education*. 5 (Special Issue): 75-91. [In Persian] <https://doi.org/10.30473/t-edu.2025.75854.1332>
- Bilgili, S., & Çiltaş, A. (2025). Improving mathematical modeling competencies of mathematics teachers in a technology-supported learning environment. *Frontiers in Education*, 10, Article 1509652. <https://doi.org/10.3389/feduc.2025.1509652>
- Borba, M. C., Chiari, A. S., & Almeida, H. R. F. L. (2025). A systematic review of technology use in middle and high school mathematics education. *Frontiers in Education*, 10, Article 1644284. <https://doi.org/10.3389/feduc.2025.1644284>
- Büscher, C., & Schnell, S. (2017). Students' emergent modeling of statistical measures: A case study. *Statistics Education Research Journal*, 16(2), 144–162. <https://doi.org/10.52041/serj.v16i2.188>
- Durandt, R., Blum, W., & Lindl, A. (2021). Fostering mathematical modelling competency of South African engineering students: Which influence does the teaching design have? *Educational Studies in Mathematics*, 109, 361–381. <https://doi.org/10.1007/s10649-021-10068-7>
- Darmanova, Z., Abylkassymova, A., & Nurmukhamedova, Z. (2025). A systematic review of technology use in middle and high school mathematics education: Insights from contextual, methodological, and evaluation characteristics. *Frontiers in Education*, 10, Article 1644284. <https://doi.org/10.3389/feduc.2025.1644284>
- Drijvers, P., Godino, J. D., Font, V., & Trouche, L. (2013). One episode, two lenses: A reflective analysis of student learning with computer algebra from instrumental and onto-semiotic perspectives. *Educational Studies in Mathematics*, 82, 23–49. <https://doi.org/10.1007/s10649-012-9416-8>
- Eckert, A., & Nilsson, P. (2022). The emergence of the “FlexTech” orchestration of inferential reasoning on pattern generalization. *Digital Experiences in Mathematics Education*, 8(1), 1–26. <https://doi.org/10.1007/s40751-021-00098-4>
- Elia, I., & Spiro, R. J. (2006). Learning mathematics through multiple representations: The case of trigonometric functions. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1–2), 55–74. <https://doi.org/10.1007/s10649-006-3143-7>
- Engelbrecht, J., & Borba, M. C. (2023). Recent developments in using digital technology in mathematics education. *ZDM–Mathematics Education*, 56, 281–292. <https://doi.org/10.1007/s11858-023-01530-2>
- Ferreder, A. T., Mihrka, A. A., Ayele, M. A., & Arara, A. A. (2024). Enhancing students' conceptual understanding and problem-solving skills in learning trigonometry through contextual-based mathematical modeling instruction. *International Journal of Secondary Education*, 12(4), 108–119. <https://doi.org/10.11648/j.ijssedu.20241204.15>
- Juandi, J., Sugiarno, & Noviani, E. (2025). Enhancing students' conceptual understanding of trigonometric functions through GeoGebra based learning. *Al Jabar: Jurnal Pendidikan Matematika*, 16(1), 55–70. <https://doi.org/10.24042/ajpm.v16i1.25653>

- Koyunkaya, M. Y., & Dede, Y. (2024). Using different digital tools in designing and solving mathematical modelling problems. *Education and Information Technologies*, 29, 1–24. <https://doi.org/10.1007/s10639-024-12577-3>
- Krawitz, J., Chang, Y.-P., Yang, K.-L., & Schukajlow, S. (2021). The role of reading comprehension in mathematical modelling: Improving the construction of a real-world model and interest in Germany and Taiwan. *ZDM – Mathematics Education*. Advance online publication.
- Li, M., & Li, B. (2024). Unravelling the dynamics of technology integration in mathematics education. *Education and Information Technologies*, 29, 23687–23715.
- Mohammadi, A., & Nasiri, M. (2025). Identifying and prioritizing the essential and fundamental requirements for smart school implementation: A case study of Khuzestan province. *Journal of Education*, 5(1), 9–23. [In Persian]
- Moradi, R. & Bayrvandi, V (2025). Effectiveness of Technology-Based Active Learning Strategy on Academic Satisfaction and Cognitive Flexibility of Students in Experimental Science Course, *Technology and Scholarship in Education*, 4(4):41-58. <https://doi.org/10.30473/tesdu.2025.72617.1208>
- Mosese, N., & Ogbonnaya, U. I. (2021). GeoGebra and students' learning achievement in trigonometric functions. *Cypriot Journal of Educational Sciences*, 16(2), 827–846. <https://doi.org/10.18844/cjes.v16i2.5685>
- Patel, A., & Pfannkuch, M. (2018). Developing a statistical modeling framework. *ZDM–Mathematics Education*, 50(7), 1197–1212. <https://doi.org/10.1007/s11858-018-0960-2>
- Rojano, T., & Sutherland, R. (2020). Technology and curricula in mathematics education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (2nd ed., pp. 849–853). Springer.
- Schukajlow, S., Achmetli, K., & Rakoczy, K. (2019). Does constructing multiple solutions affect self-efficacy? *Educational Studies in Mathematics*, 100(1), 43–60. <https://doi.org/10.1007/s10649-018-9847-y>
- Schönbrodt, S., Wohak, K., & Frank, M. (2022). Digital tools to enable collaborative mathematical modeling online. *Modelling in Science Education and Learning*, 15(1), 151–174. <https://doi.org/10.4995/msel.2022.16269>
- Firmansyah, R., Suryadi, D., & Turmudi, T. (2024). Enhancing students' conceptual understanding and problem-solving skills in learning trigonometry through contextual-based mathematical modeling. *International Journal of Secondary Education*.
- Freiman, V. (2020). Technology design in mathematics education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (2nd ed., pp. 853–861). Springer Nature.
- Ghosh, J. B. (2015). Learning mathematics in secondary school: The case of mathematical modelling enabled by technology. In *Selected regular lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 203–222). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-17187-6_12
- Goos, M., Soury-Lavergne, S., Assude, T., Brown, J., Kong, C. M., Glover, D., & Sinclair, M. (2010). Teachers and teaching: Theoretical perspectives and issues concerning classroom implementation. In C. Hoyles & J. Lagrange (Eds.), *Mathematics education and technology—Rethinking the terrain* (pp. 311–328). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0146-0_14
- Greefrath, G., Siller, H.-S., Klock, H., & Wess, R. (2022). Pre-service secondary teachers' pedagogical content knowledge for the teaching of mathematical modelling. *Educational Studies in Mathematics*, 109(2), 383–407. <https://doi.org/10.1007/s10649-021-10038-z>
- Gurmu, F., Tuge, C., & Hunde, A. B. (2024). Effects of GeoGebra assisted instructional methods on students' conceptual understanding of geometry. *Cogent Education*, 11(1), 2379745. <https://doi.org/10.1080/2331186X.2024.2379745>
- Haugstad, A., & Isabwe, G. M. N. (2017). Using the theory of instrumental genesis to study students' work with a digital tool for applying integrals in a kinematic simulation. In *Proceedings of CERME 10* (pp. 2088–2096). Dublin, Ireland.
- Hochmuth, R., Peters, J., Rønning, F., & Winsløw, C. (2024). Modelling mathematics for educational research and practice: A comparison of two theoretical approaches. *Educational Studies in Mathematics*, 118, 153–168. <https://doi.org/10.1007/s10649-024-10368-8>
- Van Dijke-Droogers, M., Drijvers, P., & Bakker, A. (2021). Statistical modeling processes through the lens of instrumental genesis. *Educational Studies in Mathematics*, 107(2), 235–260. <https://doi.org/10.1007/s10649-020-10023-y>
- Siregar, T. (2025). Integrating GeoGebra in Mathematics Education: Enhancing Pedagogical Practices among Teachers and Lecturers. *Preprints*. <https://doi.org/10.20944/preprints202510.1359.v1>
- Usman, A. N., Arifudin, R., Ilham Aditya, R., Maulana, B. S., & Lavicza, Z. (2024). Using different digital tools in designing and solving mathematical modelling problems. *Education and Information Technologies*, 29, 19035–19065. <https://doi.org/10.1007/s10639-024-12577-3>