

## یک مشخصه از $n$ -همریختی‌های جردن

عباس زیوری کاظم‌پور\*

استادیار، گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه آیت الله بروجردی

تاریخ دریافت: ۱۳۹۶/۰۶/۳۱ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۶/۱۰/۱۸

### A characterization of $n$ -Jordan homomorphisms

Abbas Zivari-Kazempour\*

Assistant Professor, Department of Mathematics, Faculty of Sciences,  
University of Ayatollah Borujerdi

Received: 9/22/2017

Accepted: 1/8/2018

**Abstract:** Let  $n \in \{2, 3, 4\}$  be fixed. In this paper under special hypotheses we prove that each  $n$ -Jordan Homomorphism from unital Banach algebra  $A$  into a commutative Banach algebra  $B$  is an  $n$ -Homomorphism.

**Keywords:**  $n$ -homomorphism,  $n$ -Jordan homomorphism, commutative Banach algebra.

**چکیده:** فرض کنید  $n \in \{2, 3, 4\}$  ثابت باشد. در این مقاله تحت شرایط خاص ثابت می‌کنیم که هر  $n$ -همریختی جردن از جبر باناخ یک‌دار  $A$  به توی یک جبر باناخ جابه‌جایی  $B$  یک  $n$ -همریختی است.

**کلمات کلیدی:**  $n$ -همریختی،  $n$ -همریختی جردن، جبر باناخ جابه‌جایی.

#### ۱ مقدمه

مطب نادرست است. مفهوم  $n$ -همریختی‌ها برای جبرها روی میدان اعداد مختلط توسط حجازیان<sup>۱</sup> و همکارانش در منبع [۱] مورد مطالعه قرار گرفت. برخی از خواص  $n$ -همریختی‌ها در منبع [۲] به دست آمده است.

در [۳] اسحاقی گرجی<sup>۲</sup> مفهوم  $n$ -همریختی‌های جردن را معرفی کرد. یک تابع خطی  $f$  بین جبرهای باناخ  $A$  و  $B$  یک  $n$ -همریختی جردن نامیده می‌شود اگر برای هر  $a \in A$

فرض کنید  $A$  و  $B$  جبرهای باناخ مختلط،  $n \geq 2$  یک عدد صحیح و  $f: A \rightarrow B$  یک تابع خطی باشد. در این صورت  $f$  یک  $n$ -همریختی نامیده می‌شود اگر برای هر  $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$

$$f(a_1 a_2 \dots a_n) = f(a_1) f(a_2) \dots f(a_n).$$

به طور عام یک  $n$ -همریختی فقط یک همریختی نامیده می‌شود. واضح است که هر همریختی برای  $n \geq 2$  یک  $n$ -همریختی می‌باشد، ولی در حالت کلی عکس این

<sup>1</sup>Hejazian

<sup>2</sup>Eshaghi Gordji

به دست آمده است. در این مقاله برای  $n \in \{2, 3, 4\}$ ,

نشان می‌دهیم که اگر برای هر  $a, b, x, y \in A$

$$f(axby - aybx) = 0,$$

آنگاه هر  $n$ -همریختی جردن  $f$  از جبر باناخ یک‌دار

$A$  به جبر باناخ جابه‌جایی  $B$  یک  $n$ -همریختی است.

## ۲ یک تجزیه از ۴-همریختی‌های جردن

لم ۱. فرض کنید  $n \in \{2, 3, 4\}$  ثابت و  $A$  یک جبر

باناخ یک‌دار با واحد  $e$  باشد. اگر  $f: A \rightarrow B$  یک

$n$ -همریختی جردن ناصفر باشد، آنگاه  $f(e) \neq 0$ .

برهان. حالت  $n = 2$  ساده است. حالت  $n = 3$  لم ۲.۲

از منبع [۸] می‌باشد. لذا فرض کنید  $n = 4$  باشد و

$f: A \rightarrow B$  یک ۴-همریختی جردن ناصفر باشد.

بنابراین برای هر  $a \in A$   $f(a^4) = f(a)^4$ .

با جایگذاری  $x + y$  به جای  $a$ ، رابطه زیر حاصل

می‌شود:

$$I + J = 6f(x)^3 f(y)^3 + 4f(x)^2 f(y)^4 + 4f(x)f(y)^5, \quad (2)$$

که در آن

$$I = f(x^4 y^4 + y^4 x^4 + xyxy + xy^3 x + yx^3 y + yx^4 y),$$

و

$$J = f(x^3 y + x^4 yx + y^4 xy + y^3 x + xyx^3 + y^4 + yx^3 + yxy^3).$$

با جایگذاری  $-y$  به جای  $y$  در رابطه (۲) به دست

می‌آوریم:

$$I - J = 6f(x)^3 f(y)^3 - 4f(x)^2 f(y)^4 - 4f(x)f(y)^5. \quad (3)$$

بنابر روابط (۲) و (۳)، برای هر  $x, y \in A$

$$f(a^n) = f(a)^n.$$

یک ۲-همریختی جردن به طور ساده یک همریختی

جردن نامیده می‌شود. قابل ذکر است که اگر  $n = 2$

باشد، آنگاه برای هر  $a \in A$   $f(a^2) = f(a)^2$ ، لذا با

تعویض  $a$  با  $a + b$  نتیجه می‌شود که برای هر

$$a, b \in A$$

$$f(ab + ba) = f(a)f(b) + f(b)f(a). \quad (1)$$

به عبارت دیگر  $f$  یک همریختی جردن است

اگر تنها اگر رابطه (۱) برقرار باشد [۴]. واضح است که

هر  $n$ -همریختی یک  $n$ -همریختی جردن می‌باشد،

ولی در حالت کلی عکس این مطب نادرست است. به

عنوان مثال برای حالت‌های  $n \in \{2, 3, 4\}$  نشان داده

شده که هر  $n$ -همریختی جردن بین جبرهای باناخ

جابه‌جایی  $A$  و  $B$  یک  $n$ -همریختی است [۳].

همچنین این نتیجه برای هر عدد طبیعی گسترش داده

شد [۵].

زلاسکو<sup>۱</sup> یک مشخصه از همریختی‌های جردن را

در منبع [۶] بیان نموده که در زیر به آن اشاره می‌کنیم.

برای رویکرد دیگری از این نتیجه به مرجع [۷] مراجعه

کنید.

قضیه ۱. فرض کنید  $A$  یک جبر باناخ باشد که لزوماً

جابه‌جایی نیست و فرض کنید  $B$  یک جبر باناخ نیم-

ساده و جابه‌جایی باشد. در این صورت هر همریختی

جردن  $f: A \rightarrow B$  یک همریختی است.

نتایج متعددی در مورد ۳-همریختی جردن روی

جبرهای باناخ و  $C^*$ -جبرها توسط نویسنده در [۸]

<sup>1</sup>Zelazko

بنابراین برای هر  $a \in A$ ،  $f(a^x) = f(a)^x$ . بنابر رابطه

$$(۴) \quad \text{برای هر } x, y \in A,$$

$$(۷) \quad I = \epsilon f(x)^x f(y)^x.$$

بنابر فرض

$$f(xyxy) = f(yxyx)$$

$$(x^x y^x) = f(y^x x^x),$$

لذا با جایگذاری روابط فوق در رابطه (۷) به دست

می‌آوریم:

$$(۸) \quad \begin{aligned} & 2f(x^x y^x + xyxy) + f(xy^x x + yx^x y) \\ & = \epsilon f(x)^x f(y)^x. \end{aligned}$$

با جایگذاری  $a + b$  به جای  $x$ ، در رابطه (۸)، تساوی

زیر به دست می‌آید:

$$(۹) \quad \begin{aligned} & 2f(aby^x + bay^x + ayby + byay) \\ & + f(ay^x b + by^x a + yayb + ybya) \\ & = 12f(a)f(b)f(y)^x. \end{aligned}$$

فرض کنید  $a$  متعلق به هسته  $f$  دلخواه باشد، لذا

$f(a) = 0$ . فرض کنید  $e$  عنصر واحد  $A$  باشد. با

جایگذاری  $e$  به جای  $y$ ، در رابطه (۹) نتیجه می‌شود:

$$(۱۰) \quad f(ab + ba) = 0.$$

بنابر فرض،  $f(ab) = f(ba)$ ، لذا بنابر رابطه (۱۰)،

$f(ab) = f(ba) = 0$ . بنابراین  $ab, ba$  متعلق به

هسته  $f$  است. در نتیجه هسته  $f$  یک ایده‌آل در  $A$

است.  $\square$

اکنون قضیه اصلی را بیان و اثبات می‌کنیم.

**قضیه ۳.** فرض کنید  $n \in \{2, 3, 4\}$  ثابت و

$f: A \rightarrow B$  یک  $n$ -همریختی جردن از جبر باناخ

یکدار  $A$  به جبر باناخ جابه‌جایی  $B$  باشد به طوری که

$$\text{برای هر } a, b, x, y \in A$$

$$(۴) \quad I = \epsilon f(x)^x f(y)^x.$$

اکنون فرض کنید که  $f(e) = 0$  باشد، در این صورت

با جایگذاری  $e$  به جای  $y$  در رابطه (۴) نتیجه می‌شود

که برای هر  $x \in A$

$$(۵) \quad \epsilon f(x^x) = 0.$$

با جایگذاری  $x + e$  به جای  $x$  در رابطه (۵) نتیجه

می‌شود که  $f(x^x + 2x + e) = 0$ . بنابراین برای هر

$x \in A$ ،  $f(x) = 0$ ، که این با فرض ناصفر بودن  $f$

در تناقض است. لذا فرض خلف باطل و  $f(e) \neq 0$

است.  $\square$

در حالت کلی هسته یک  $n$ -همریختی جردن

ممکن است یک ایده‌آل نباشد. برای مشاهده یک مثال

نقض به منبع [۷] مراجعه شود. نتیجه زیر تحت شرایط

خاص نشان می‌دهد که هسته یک  $n$ -همریختی جردن

یک ایده‌آل است.

**قضیه ۲.** فرض کنید  $n \in \{2, 3, 4\}$  ثابت و

$f: A \rightarrow B$  یک  $n$ -همریختی جردن از جبر باناخ

یکدار  $A$  به جبر باناخ جابه‌جایی  $B$  باشد به طوری که

برای هر  $a, b \in A$

$$(۶) \quad f(ab - ba) = 0.$$

در این صورت هسته  $f$  یک ایده‌آل در  $A$  است.

برهان. حالت  $n = 2$  ساده است. در واقع اگر  $f$  یک

همریختی جردن باشد، آنگاه از روابط (۱) و (۶) نتیجه

می‌شود که  $f$  یک همریختی است. بنابراین هسته  $f$

یک ایده‌آل در  $A$  است. حالت  $n = 3$  قضیه ۳.۵ از

منبع [۹] می‌باشد. لذا فرض کنید  $n = 4$  و

$f: A \rightarrow B$  یک ۴-همریختی جردن ناصفر باشد.

از طرفی بنابر قضیه قبل هسته  $f$  یک ایده‌آل در  $A$  است، لذا بنابر رابطه (۱۳)،

$$f(bxay) = f(baxy) = f(bayx). \quad (۱۸)$$

$$f(axby) = f(abxy) = f(abyx) \\ = f(bayx).$$

با جایگذاری روابط (۱۷) و (۱۸) در رابطه (۱۶) نتیجه می‌شود که برای هر  $a, b, x, y \in A$

$$f(abxy) = f(a)f(b)f(x)f(y).$$

بنابراین  $f$  یک ۴-همریختی است.  $\square$

### ۳ یک تجزیه از همریختی‌های جردن

لم ۲. هر همریختی جردن  $f$  بین جبرهای باناخ  $A$  و  $B$  یک  $n$ -همریختی جردن است.

برهان. فرض می‌کنیم که  $f$  یک همریختی جردن باشد، لذا برای هر  $a, b \in A$

$$f(ab + ba) = f(a)f(b) + f(b)f(a). \quad (۱۹)$$

با جایگذاری  $a^2$  به جای  $b$  در رابطه (۱۹) نتیجه می‌شود که برای هر  $a \in A$

$$f(a^2) = f(a)^2. \quad (۲۰)$$

بنابراین  $f$  یک ۳-همریختی جردن است. با جایگذاری  $a^2$  به جای  $b$  در رابطه (۱۹) عبارت زیر به دست می‌آید:

$$2f(a^3) = f(a)f(a^2) + f(a^2)f(a). \quad (۲۱)$$

بنابر روابط (۲۰) و (۲۱)، برای هر  $a \in A$ ،  $f(a^3) = f(a)^3$  لذا  $f$  یک ۴-همریختی جردن است.

اکنون یک بحث استقرایی نشان می‌دهد که حکم برای هر  $n \in \mathbb{N}$  برقرار است.  $\square$

$$f(axby - aybx) = 0. \quad (۱۱)$$

در این صورت  $f$  یک  $n$ -همریختی است.

برهان. حالت  $n = 2$  ساده است. حالت  $n = 3$  قضیه ۲.۷ از منبع [۸] می‌باشد. فرض کنید  $n = 4$  و  $f: A \rightarrow B$  یک ۴-همریختی جردن ناصفر باشد.

لذا برای هر  $a \in A$ ،  $f(a^4) = f(a)^4$ . بنابر رابطه (۴) برای هر  $x, y \in A$ ،  $I = 6f(x)^2f(y)^2$  که در آن

$$I = f(x^2y^2 + y^2x^2 + xyxy \\ + xy^2x + yxyx + yx^2y). \quad (۱۲)$$

فرض کنید  $e$  عنصر واحد  $A$  باشد. با جایگذاری  $e$  به جای  $a$  و  $b$  در رابطه (۱۱) برای هر  $x, y \in A$  نتیجه می‌شود که

$$f(xy - yx) = 0. \quad (۱۳)$$

از روابط (۱۱) و (۱۳) نتیجه می‌شود که

$$f(xyxy) = f(yxyx) \\ f(xy^2x) = f(x^2y^2) = f(y^2x^2) = f(yx^2y),$$

با جایگذاری روابط فوق در رابطه (۱۲) به دست می‌آوریم:

$$2f(x^2y^2) + f(xyxy) = 3f(x)^2f(y)^2. \quad (۱۴)$$

با جایگذاری  $a + b$  به جای  $x$ ، در رابطه (۱۴)، تساوی زیر حاصل می‌شود:

$$2f(aby^2 + bay^2) + f(ayby + byay) \\ = 6f(a)f(b)f(y)^2. \quad (۱۵)$$

تعویض  $x + y$  با  $y$  در رابطه (۱۵)، نشان می‌دهد که

$$2f(abxy + abyx + baxy + bayx) \\ + f(axby + aybx + bxay + byax) \\ = 12f(a)f(b)f(x)f(y). \quad (۱۶)$$

از رابطه (۱۱) نتیجه می‌شود که

$$f(byax) = f(bxay) \\ f(aybx) = f(axby). \quad (۱۷)$$

با جایگذاری  $a+e$  به جای  $a$  در رابطه (۲۳) داریم

$$f(3a^2 + 2a^3) = 3f(a)^2 + 2f(a)^3. \quad (24)$$

با جایگذاری  $a+e$  به جای  $a$  در رابطه (۲۴)، تساوی

زیر حاصل می‌شود:

$$f(a^2) = f(a)^2. \quad (25)$$

از روابط (۲۴) و (۲۵) نتیجه می‌شود که برای هر

$a \in A$ ،  $f(a^3) = f(a)^3$ . لذا  $f$  یک ۳-همریختی

جردن است. یک بحث مشابه نشان می‌دهد که حکم

برای هر  $n \geq 4$ ، برقرار است.  $\square$

### نتیجه زیر از لم ۱ و

قضیه ۲ به دست می‌آید.

**نتیجه ۱.** تابع خطی و یکدار  $f$  بین جبرهای باناخ  $A$  و

$B$  یک همریختی جردن است اگر و تنها اگر برای

$n \geq 2$ ، یک  $n$ -همریختی جردن باشد.

تابع خطی  $f$  بین جبرهای باناخ یکدار  $A$  و  $B$

یکدار نامیده می‌شود هرگاه  $f(e) = e'$  که در آن  $e$

همانی جبر باناخ  $A$  و  $e'$  همانی جبر باناخ  $B$  است.

**قضیه ۴.** برای  $n \geq 2$ ، هر  $(n+1)$ -همریختی جردن

یکدار  $f$  بین جبرهای باناخ  $A$  و  $B$  یک

$n$ -همریختی جردن است.

برهان. فرض کنید  $n = 2$  و  $f: A \rightarrow B$  یک

۳-همریختی جردن یکدار باشد. در این صورت برای

هر  $a \in A$

$$f(a^2) = f(a)^2. \quad (22)$$

با جایگذاری  $a+e$  به جای  $a$  در رابطه (۲۲) به دست

می‌آوریم،  $f(a^2) = f(a)^2$ . بنابراین  $f$  یک همریختی

جردن است. اکنون فرض کنید  $n = 3$  و

$f: A \rightarrow B$  یک ۴-همریختی جردن یکدار باشد.

بنابراین برای هر  $a \in A$

$$f(a^4) = f(a)^4. \quad (23)$$

## References

[1] S. Hejazian, M. Mirzavaziri, M.S. Moslehian,  $n$ -Homomorphisms, Bull. Iranian Math. Soc., 31 (2005) 13-23.

[2] J. Bracic, M.S. Moslehian, On automatic continuity of 3-homomorphisms on Banach algebras, Bull. Malaysian. Math. Sci. Soc., 30 (2007) 195-200.

[3] M.E. Gordji,  $n$ -Jordan homomorphisms, Bull. Aust. Math. Soc., 80 (2009) 159-164.

[4] T.W. Palmer, Banach Algebras and the General Theory of \*-Algebras: Volume 2, \*-Algebras, Cambridge University Press, 1994.

[5] E. Gselmann, On approximate  $n$ -Jordan homomorphisms, in: Annales Math. Silesianae, 2014, pp. 47-58.

[6] W. Zelazko, A characterization of multiplicative linear functionals in complex Banach algebras, Studia Math., 30 (1968) 83-85.

[7] A. Zivari-kazempour, A characterization of Jordan homomorphism on Banach algebras, Chinese J. Math., 2014 (2014).

[8] A. Zivari-kazempour, A characterization of 3-Jordan homomorphism on Banach algebras, Bull. Aust. Math. Soc., 93 (2016) 301-306.

[9] A. Zivari-Kazempour, A characterization of Jordan and 5-Jordan homomorphisms between Banach algebras, Asian-European J. Math., 11 (2018) 1850021.