

## حل عددی معادلات دیفرانسیل-انتگرالی همراه با شرط انتگرالی در فضای هسته باز تولید هیلبرت

ابراهیم امینی<sup>۱\*</sup>، مجتبی فردی<sup>۲</sup>

۱. پژوهشگر، گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور

۲. پژوهشگر، گروه ریاضی کاربردی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه شهرکرد

تاریخ دریافت: ۱۳۹۶/۰۶/۳۰ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۶/۱۱/۱۲

### Numerical solution of differential-integral equations with integral conditions in reproducing kernel Hilbert space

Ebrahim Amini<sup>1,\*</sup>, Mojtaba Fardi<sup>2</sup>

1. Researcher, Department of Mathematics, Payme Noor University, Tehran

2. Researcher, Department of Applied Mathematics, Faculty of Science, Shahrekord University

Received: 9/21/2017

Accepted: 2/1/2018

**Abstract:** In this paper, the reproducing kernel method for solving differential-integral equations with integral condition is proposed. The exact solution is represented in the form of series in a reproducing kernel space. Numerical examples presented to illustrate the accuracy of the proposed method.

**Keywords:** Integral condition, Reproducing kernel space, Error analysis, Convergence analysis.

**چکیده:** در این مقاله روش هسته باز تولید برای حل معادلات دیفرانسیل-انتگرالی همراه با شرط انتگرالی پیشنهاد شده است. جواب دقیق به شکل سری در فضای هسته باز تولید نمایش داده می‌شود. مثال‌های عددی ارائه شده دقت روش پیشنهادی را نشان می‌دهد.

**کلمات کلیدی:** شرط انتگرالی، فضای هسته باز تولید، آنالیز خطا، آنالیز همگرایی.

#### ۱ مقدمه

تقسیم‌بندی می‌شوند. در میان شرایط مرزی حاکم بر معادله دیفرانسیل می‌توان به شرایط مرزی غیرموضعی اشاره کرد، که در آن مقدار تابع بر روی مرز یا قسمتی از مرز به مقادیر درون دامنه یا سایر قسمت‌های مرز مربوط می‌شود. دسته دیگری از معادلات پر کاربرد در طبیعت، معادلات انتگرال-دیفرانسیل غیرخطی همراه با شرط انتگرالی هستند. این معادلات نقش مهمی را در

مسائل مقدار مرزی را می‌توان بر حسب ویژگی‌های متعددی دسته‌بندی کرد. مثلاً از نظر خطی بودن، معادلات دیفرانسیل به دو دسته خطی و غیرخطی تقسیم می‌شوند و از نظر شرایط، مسائل به سه دسته مسائل مقدار اولیه، مقدار مرزی و مقدار اولیه-مرزی

\*Corresponding author: [eb.amini.s@pnu.ac.ir](mailto:eb.amini.s@pnu.ac.ir)

مقایسه با روش‌های دیگر برای حل مسائل خطی و غیرخطی را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

۱. دارای پیاده‌سازی آسان و توانا در استفاده از شرایط مرزی متنوع است.
۲. بی‌نیاز از شبکه است و به گسسته‌سازی زمان نیازی ندارد.
۳. در حل بسیاری از مسائل غیرخطی با شرایط غیرموضعی توانا است.
۴. جواب تقریبی به جواب تحلیلی به‌طور یکنواخت همگرا است.

اخیرا نظریه هسته‌های بازتولید در حل معادلات دیفرانسیل و معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی به کار رفته است. نویسندگان مقاله [۹] جواب عددی معادلات دیفرانسیل-انتگرالی فردهلم را با استفاده از روش فضای هسته بازتولید هیلبرت به‌دست آورده‌اند. در مقاله [۱۰] روشی عددی برای حل معادلات دیفرانسیل از نوع براتو پیشنهاد شده است و جواب دقیق و تقریبی این معادلات در فضای هسته بازتولید هیلبرت محاسبه شده است. جواب دقیق و تقریبی از معادلات دیفرانسیل تأخیری از مرتبه کسری در فضای هسته بازتولید  $W_p^m$  در مقاله [۱۱] محاسبه شده است. در مقاله [۱۲] برپایه روش هسته بازتولید یک الگوریتم تکراری برای حل نوع خاصی از مسائل حساب تغییراتی ارائه شده است. در این مقاله همگرایی جواب تقریبی به جواب دقیق مسئله اثبات شده است. در مقاله [۱۳] روشی برای حل مسائل مقدار مرزی-اولیه با شرایط غیرموضعی در یک فضای هسته بازتولید ارائه شده است. برای به‌دست آوردن جواب تقریبی معادلات بلک-شولز، روش فضای هسته بازتولید هیلبرت در

مدل‌سازی پدیده‌های فیزیکی همچون ارتعاشات ذره در شبکه، جریان‌ات در شبکه‌های الکتریکی، فیزیک کوانتوم و مهندسی نساجی دارند. پیچیدگی حل بسیاری از معادلات دیفرانسیل-انتگرالی غیرخطی متنوع از جمله شرایط مرزی غیرموضعی، محققان را به یافتن روش‌های ساده‌تر و در عین حال متکی بر نظریه قوی در آنالیز تابعی سوق داده است. در میان این روش‌ها می‌توان به روش‌های مبتنی بر فضای هسته بازتولید اشاره کرد.

هسته بازتولید برای اولین بار در اوایل قرن بیستم در تحقیقات روی مسائل مقدار مرزی مورد استفاده قرار گرفت. در سال ۱۹۰۷، زارمبا اولین کسی بود که هسته متناظر با برخی از توابع خاص را معرفی و خاصیت بازتولید آنها را بیان نمود. در سال ۱۹۴۸ نظریه کلی هسته‌های بازتولید توسط آرونزان نظم گرفت [۱].

از سال ۱۹۸۰ به واسطه تلاش‌های کوی و همکاران توابع هسته بازتولید به شکل بسیار ساده چندجمله‌ای معرفی شدند [۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸]. آنها توانستند روی روش‌های مبتنی بر فضای هسته بازتولید کار کنند.

روش‌های مبتنی بر فضای هسته بازتولید، بر پایه نظریه بهترین تقریب در فضای هیلبرت و استفاده از بسط فوریه می‌باشد. در این روش‌ها، ابتدا فضای هسته بازتولید با توجه به صورت کلی مسئله و شرایط حاکم بر آن تعریف می‌شود و سپس هسته بازتولید را به صورت تابعی چند ضابطه‌ای به‌دست می‌آوریم. علاوه بر این توابع پایه متعامد یکه با استفاده از فرایند متعامدسازی گرام-اشمیت تولید می‌شوند و به عنوان توابع پایه در تقریب جواب مورد استفاده قرار می‌گیرند. بعضی از وجوه تمایز روش هسته بازتولید در

مقاله [۱۴] پیشنهاد شده است.

در این مقاله، روش هسته بازتولید برای حل معادلات دیفرانسیل-انتگرالی غیرخطی با یک شرط انتگرالی به شکل زیر مورد بررسی قرار می‌گیرد:

$$y'(x) = f(t, y(x), v(y(x)), w(y(x))), \quad (1)$$

$$0 \leq x \leq 1,$$

$$y(0) - y(1) - \int_0^1 D(s)y(s)ds = 0, \quad (2)$$

که در آن

$$v(y(x)) = \int_0^1 k_1(s, x)G(y(s))ds \quad (\text{الف})$$

$$w(y(x)) = \int_0^x k_2(s, x)H(y(s))ds \quad (\text{ب})$$

(ج)  $y(x) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  تابع مجهول است.

(د)  $k_2 : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  و  $k_1 : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

هسته‌های معادله انتگرال هستند.

ترتیب ارائه مطالب به شکل زیر خواهد بود: در بخش دوم، ابتدا به تعریف فضای هسته بازتولید  ${}_c W_{\tau}^m [0, 1]$  می‌پردازیم. پیاده‌سازی روش در بخش سوم ارائه می‌شود. بخش چهارم به آنالیز همگرایی و کران‌های خطای روش اختصاص می‌یابد. در نهایت در بخش پنجم با استفاده از آزمایشات عددی، درستی نتایج ارائه شده در بخش‌های قبل مورد تأیید قرار خواهد گرفت.

## ۲ فضای هسته بازتولید

فضای  $W_{\tau}^1 [0, T]$

فضای توابع  $W_{\tau}^1 [0, T]$  را به صورت:

$$W_{\tau}^1 [0, T] = \{y : [0, T] \rightarrow \mathbb{R} \mid y \in \mathcal{AC}[0, T], y' \in L^1 [0, T]\},$$

همراه با ضرب داخلی

$$\langle y, z \rangle_{W_{\tau}^1} = u(0)v(0) + \int_0^T y'(x)z'(x)dx,$$

و نرم

$$\|y\|_{W_{\tau}^1} = \sqrt{\langle y, y \rangle_{W_{\tau}^1}},$$

تعریف می‌کنیم، که در آن  $y, z \in W_{\tau}^1$ . واضح است که فضای  $W_{\tau}^1 [0, T]$ ، فضای هسته بازتولید هیلبرت و هسته بازتولید آن به صورت زیر است:

$$R_s(x) = \begin{cases} 1+s, & s \leq x, \\ 1+x, & s > x. \end{cases} \quad (3)$$

فضای  ${}_c W_{\tau}^m [0, 1]$

تعریف ۱. فضای توابع  ${}_c W_{\tau}^m [0, 1] (m \geq 2)$  را به صورت:

$${}_c W_{\tau}^m [0, 1] = \{y : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid y, y', \dots, y^{(m-1)} \in \mathcal{AC}[0, 1],$$

$$y(0) - y(1) - \int_0^1 D(s)y(s)ds = 0,$$

$$y^{(m)} \in L^1 [0, 1]\},$$

همراه با ضرب داخلی:

$$\langle y, z \rangle_{{}_c W_{\tau}^m} = y(0)z(0) + y'(0)z'(0) + \dots + y^{(m-1)}(0)z^{(m-1)}(0) + \int_0^1 y^{(m)}(x)z^{(m)}(x)dx,$$

و نرم:

$$\|y\|_{{}_c W_{\tau}^m} = \sqrt{\langle y, y \rangle_{{}_c W_{\tau}^m}},$$

تعریف می‌کنیم، که در آن  $y, z \in {}_c W_{\tau}^m$ .

اکنون روشی برای به دست آوردن تابع هسته بازتولید  $K_s(x)$  در فضای  ${}_c W_{\tau}^m [0, 1]$  بیان می‌کنیم.

$$-\frac{\partial^{2m}}{\partial x^{2m}} K_s(x) + r(s)D(x) = \delta(x-s). \quad (5)$$

معادله (۵) دارای معادله مشخصه  $\lambda^{2m} = 0$  با مقدار مشخصه  $\lambda = 0$  با تکرار  $2m$  است. شکل کلی  $K_s(x)$  به صورت زیر است:

$$K_s(x) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{2m} c_j(s)x^{j-1} + r(s)W(x), & x < s, \\ \sum_{j=1}^{2m} d_j(s)x^{j-1} + r(s)W(x), & s \leq x, \end{cases} \quad (6)$$

که در آن

$$W(x) = \int_{x_1}^x \int_{x_2}^{x_1} \dots \int_{x_{2m-2}}^{x_{2m-3}} \dots \int_{x_{2m-1}}^{x_{2m-2}} D(x_{2m}) dx_{2m} \dots dx_2 dx_1.$$

با توجه به ویژگی‌های تابع دلتای دیراک داریم:

$$\frac{\partial^j K_s(x)}{\partial x^j} \Big|_{x=s^+} = \frac{\partial^j K_s(x)}{\partial x^j} \Big|_{x=s^-}, \quad (7)$$

$$j = 0, 1, 2, \dots, 2m-2,$$

و

$$\frac{\partial^{2m-1} K_s(x)}{\partial x^{2m-1}} \Big|_{x=s^+} - \frac{\partial^{2m-1} K_s(x)}{\partial x^{2m-1}} \Big|_{x=s^-} = -1. \quad (8)$$

همچنین با توجه به اینکه  $K_s(x) \in_c W_r^m$ ، معادله زیر را نیز داریم:

$$K_s(0) - K_s(1) - \int_0^1 K_s(x)y(x)dx = 0. \quad (9)$$

رابطه (۶) دارای  $2m+1$  مجهول  $c_j(x), d_j(x), (j=1, 2, \dots, 2m)$  و  $r(s)$  است که با حل معادله (۴) و معادلات (۹)–(۷) به دست می‌آیند.

### ۳ جواب در فضای هسته بازتولید

فرض می‌کنیم مسئله (۱) و (۲) دارای جواب یکتا بوده

فرض می‌کنیم  $K_s(x)$  تابع هسته بازتولید فضای  $W_r^m[0,1]$  باشد، تابع هسته بازتولید  $K_s(x)$  در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$\langle y(x), K_s(x) \rangle_{W_r^m} = \sum_{j=0}^{m-1} y^{(j)}(0) \frac{\partial^j}{\partial x^j} K_s(0) + \int_0^1 y^{(m)}(x) \frac{\partial^m}{\partial x^m} K_s(x) dx + r(s)(y(0) - y(1) - \int_0^1 D(s)y(s)ds) = y(s),$$

که در آن  $y \in [0,1]$  و  $y(x) \in_c W_r^m$ . اکنون با استفاده مکرر از انتگرال‌گیری جزء به جزء داریم:

$$\langle y(x), K_s(x) \rangle_{W_r^m} = \sum_{j=0}^{m-1} y^{(j)}(0) \frac{\partial^j}{\partial x^j} K_s(0) + \sum_{j=0}^{m-1} (-1)^{m-1-j} y^{(j)}(x) \frac{\partial^{2m-1-j}}{\partial x^{2m-1-j}} K_s(x) \Big|_{x=0} - \int_0^1 y(x) \frac{\partial^{2m}}{\partial x^{2m}} K_s(x) dx + r(s)(y(0) - y(1) - \int_0^1 D(s)y(s)ds) = y(s).$$

برای برقراری رابطه

$$\langle y(x), K_s(x) \rangle_{W_r^m} = y(s)$$

کافی است باشیم:

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial^j}{\partial x^j} K_s(0) + (-1)^{m-1-j} \frac{\partial^{2m-1-j}}{\partial x^{2m-1-j}} K_s(0) + r(s) = 0, \quad j = 0 \\ & \frac{\partial^j}{\partial x^j} K_s(0) + (-1)^{m-1-j} \frac{\partial^{2m-1-j}}{\partial x^{2m-1-j}} K_s(0) = 0, \quad (4) \\ & \quad \quad \quad j = 1, \dots, m-1 \\ & \frac{\partial^{2m-1-j}}{\partial x^{2m-1-j}} K_s(1) = 0, \quad j = 0, \\ & \frac{\partial^{2m-1-j}}{\partial x^{2m-1-j}} K_s(1) - r(s) = 0, \\ & \quad \quad \quad j = 1, \dots, m-1 \end{aligned} \right.$$

و جواب متعلق به فضای هسته بازتولید  $\{ \bar{\theta}_i(x) \}_{i=1}^{\infty}$  از فضای هسته بازتولید  $W_{\tau}^m[0,1]_c$ ، فرایند متعامدسازی گرام اشمیت را به کار می‌بریم، بنابراین داریم:

$$\bar{\theta}_i(x) = \sum_{k=1}^i \beta_{ik} \theta_k(x), \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

**قضیه ۲.** (مشاهده کنید [۱۵ و ۱۶]) فرض کنید  $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$  زیرمجموعه چگال در بازه  $[0,1]$  باشد، همچنین جواب مسئله (۱۰) یکتا باشد، آنگاه جواب مسئله (۱۰) به شکل زیر است:

$$y(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \beta_{ik} f(x_k, y(x_k), v(y(x_k)), w(y(x_k))), \bar{\rho}_i(x) \in_c W_{\tau}^m[0,1]. \quad (11)$$

محاسبه تقریب

از آنجا که در رابطه (۱۱) مقدار

$$f(x_k, y(x_k), v(y(x_k)), w(y(x_k)))$$

مجهول است، یک روش تکراری برای تقریب جواب ارائه می‌دهیم. به منظور محاسبه جواب تقریبی،  $y \in_c W_{\tau}^m[0,1]$  را انتخاب می‌کنیم و با استفاده از رابطه (۱۰) دنباله تکراری زیر را می‌سازیم:

$$\begin{cases} LZ_n(x) = f(x, y_{n-1}(x), v(y_{n-1}(x)), w(y_{n-1}(x))), \\ y_n(x) = P_n Z_n(x), \end{cases} \quad (12)$$

که در آن  $Z_n \in_c W_{\tau}^m[0,1]$  جواب (۱۲) است و

$$P_n :_c W_{\tau}^m[0,1] \rightarrow \{ \bar{\rho}_1(x), \bar{\rho}_2(x), \dots, \bar{\rho}_n(x) \}$$

یک تصویرگر متعامد است.

**قضیه ۳.** فرض کنید  $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$  زیرمجموعه چگال شمارش‌پذیر در بازه  $[0,1]$  باشد و بیشتر اینکه جواب

بازتولید  $W_{\tau}^m[0,1]_c (m \geq 2)$  اکنون عملگر خطی  $L :_c W_{\tau}^m[0,1] \rightarrow W_{\tau}^1[0,1]$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Ly(x) = y'(x).$$

پس مسئله (۱) به فرم زیر تبدیل می‌شود:

$$Ly(x) = f(x, y(x), v(y(x)), w(y(x))). \quad (10)$$

واضح است که عملگر خطی  $L$  کران‌دار است.

فرض می‌کنیم  $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$  یک مجموعه چگال در بازه  $[0,1]$  بوده و قرار می‌دهیم  $\rho_i(x) = R_x(x_i)$  که در آن  $R_x(x)$  هسته فضای بازتولید  $W_{\tau}^1[0,1]$  است. از آنجا که عملگر خطی تعریف شده کران‌دار است، پس عملگر الحاقی  $L^* : W_{\tau}^1[0,1] \rightarrow W_{\tau}^m[0,1]_c$  به صورت یکتا تعیین می‌شود. اکنون قرار می‌دهیم  $\theta_i(x) = L^* \rho_i(x)$  در قضیه زیر نشان می‌دهیم که دنباله  $\{\theta_i(\tau)\}_{i=1}^{\infty}$  یک دستگاه متعامد کامل تشکیل می‌دهد.

**قضیه ۱.** (مشاهده کنید [۱۵، ۱۶]) فرض کنید  $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$  زیرمجموعه چگال در بازه  $[0,1]$  باشد، آنگاه  $\{\theta_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$  یک دستگاه متعامد کامل از فضای  $W_{\tau}^m[0,1]_c$  بوده و داریم:

$$\theta_i(x) = L_s K_s(x) |_{s=x_i},$$

که در آن اندیس  $s$  در عملگر خطی  $L$  بیانگر این است که عملگر  $L$  به عنوان تابعی از  $s$  به کار برده می‌شود.

به منظور به دست آوردن دنباله متعامد یکه

مسئله (۱۲) یکتا باشد، آنگاه جواب مسئله (۱۲) به شکل زیر است:

$$z_n(x) = \sum_{i=1}^{\infty} H_i \bar{\rho}_i(x), n=1, 2, \dots,$$

که در آن

$$H_i = \sum_{k=1}^i \beta_{jk} f((x_k, y_{n-1}(x_k), v(y_{n-1}(x_k)), w(y_{n-1}(x_k))))]$$

بنابراین تقریب مرتبه  $n$ -ام جواب به صورت زیر است:

$$y_n(x) = P_n z_n(x) = \sum_{i=1}^{\infty} H_i \bar{\rho}_i(x), \quad (13)$$

$$n=1, 2, \dots,$$

که در آن  $H_i$  به صورت زیر است:

$$\left\{ \begin{array}{l} H_1 = \beta_{11} f(s, y_1(x_1), v(y_1(x_1)), w(y_1(x_1))), \\ H_r = \sum_{k=1}^r \beta_{rk} f(x_k, y_{k-1}(x_k), v(y_{k-1}(x_k)), w(y_{k-1}(x_k))), \\ H_r = \sum_{k=1}^r \beta_{rk} f(x_k, y_{k-1}(x_k), v(y_{k-1}(x_k)), w(y_{k-1}(x_k))), \\ \vdots \end{array} \right.$$

#### ۴ آنالیز همگرایی و خطا

در این قسمت از مقاله وجود جواب برای مسئله (۱) را مورد بحث قرار داده و همچنین اثبات می‌کنیم که جواب تقریبی (۱۳) همگرا به جواب دقیق است.

**قضیه ۴.**  $B = \{y_n(x) \mid \|y_n\|_{C[W_r^m[0,1]]} \leq \gamma\} \subset C[0,1]$  که در آن  $\gamma$  یک ثابت حقیقی است، یک مجموعه کران‌دار است.

برهان. می‌دانیم که:

$$\|y_n\|_{\infty} \leq \alpha \|y_n\|_{C[W_r^m[0,1]]}, \quad (14)$$

که در آن  $\alpha$  ثابت حقیقی مثبت است. بنابراین برای هر  $x \in [0,1]$  و  $y_n(x) \in B$  ثابت حقیقی مثبت  $\gamma < \infty$  موجود است به طوری که

$$\|y_n\|_{\infty} \leq \gamma$$

□ که این اثبات را کامل می‌کند.

**قضیه ۵.**  $B = \{y_n(x) \mid \|y_n\|_{C[W_r^m[0,1]]} \leq \gamma\} \subset C[0,1]$  که در آن  $\gamma$  یک ثابت حقیقی است، یک مجموعه هم-پیوسته است.

برهان. از قضیه ۴ نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned} & |y_n(s') - y_n(s'')| \\ &= |\langle y_n(x), K_{s'}(x) - K_{s''}(x) \rangle_{C[W_r^m[0,1]]}| \\ &\leq \|y_n\|_{C[W_r^m[0,1]]} \|K_{s'} - K_{s''}\|_{C[W_r^m[0,1]]} \\ &\leq \|y_n\|_{C[W_r^m[0,1]]} \left\| \frac{d}{ds} K_s \Big|_{s \in [s', s'']} \right\|_{C[W_r^m[0,1]]} |s' - s''| \\ &\leq \omega |s' - s''|, \end{aligned}$$

که در آن  $\omega$  ثابت حقیقی است. با انتخاب  $\delta = \frac{\epsilon}{\omega}$

برای هر  $s', s'' \in [0,1]$  داریم:

$$|s' - s''| < \delta \Rightarrow |y_n(s') - y_n(s'')| < \epsilon$$

□ که این اثبات را کامل می‌کند.

**قضیه ۶.** اگر شرایط زیر برقرار باشد:

الف)  $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$  یک زیر مجموعه چگال از بازه  $[0,1]$  است.

ب)  $B = \{y_n(x) \mid \|y_n\|_{C[W_r^m[0,1]]} \leq \gamma\} \subset C[0,1]$

ج) تابع  $f(x, y, v, w)$  پیوسته است که در آن  $x \in [0,1]$  و

$$y = y(x), v = v(y(x)), w = w(y(x)) \in \mathbb{R}$$

برهان. فرض کنیم  $\{y_n\}_{n \geq 1} \subset B$  همگرا به  $y$  نباشد، بنابراین یک عدد مثبت  $\varepsilon$  و زیردنباله  $\{y_{n_k}\}_{k \geq 1} \subset B$  موجود است به طوری که:

$$\|y_{n_k} - y\|_{\infty} \geq \varepsilon, k = 1, 2, \dots \quad (16)$$

از آنجا که  $\{y_{n_k}\}_{k \geq 1} \subset B$  یک زیرمجموعه از توابع کران دار و پیوسته از فضای توابع پیوسته است، بنابراین یک زیردنباله از آن موجود است، به طوری که به  $\hat{y}$  همگرا است. بدون اینکه به کلیت خللی وارد شود، می توان فرض نمود که  $\{y_{n_k}\}_{k \geq 1}$  به  $\hat{y}$  به طور یکنواخت همگرا است، بنابراین داریم:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|y_{n_k} - \hat{y}\|_{\infty} \rightarrow 0. \quad (17)$$

از آنجا که جواب معادله (۱۲) موجود و یکتا است، رابطه (۱۷) با رابطه (۱۶) متناقض است که این اثبات را کامل می کند. □

**قضیه ۸** هرگاه شرایط قضیه ۶ برقرار و همچنین جواب معادله (۱۲) موجود و یکتا باشد، آنگاه داریم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n^{(k)} - y^{(k)}\|_{\infty} \rightarrow 0, k = 1, 2, \dots, m-1.$$

برهان: مشابه برهان قضیه ۷، می توان این قضیه را نیز اثبات نمود. □

### آنالیز خطا

در این قسمت از مقاله آنالیز خطای روش پیشنهادی برای حل معادلات دیفرانسیل-انتگرالی را ارائه می دهیم.

**قضیه ۹.** فرض کنیم شرایط قضیه ۷ برقرار باشد. اگر  $y_n$ ، جواب تقریبی به دست آمده برای معادله (۱۲) در فضای  $W_r^m[0, 1]$  باشد آنگاه داریم:

$$\|y_n^{(k)} - y^{(k)}\|_{\infty} \leq \alpha_{m-k-1} h^{m-k-1}, \\ k = 0, 1, \dots, m-2,$$

آنگاه زیردنباله  $\{y_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subseteq B$  و  $y(x) \in C[0, 1]$  موجود است به طوری که:

$$y(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k}(x) \\ = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n_k} \sum_{k=1}^i \beta_{ik} f(x_k, y_{n_{k-1}}(x_k), \\ v(y_{n_{k-1}}(x_k)), w(y_{n_{k-1}}(x_k))) \bar{p}_i(x) \quad (15)$$

برهان. مجموعه  $B$  کران دار و هم پیوسته است، پس هر دنباله در  $B$  یک زیردنباله همگرا دارد که حد آن متعلق به  $B$  است. بنابراین زیردنباله  $\{y_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$  از  $B$  موجود است، به طوری که

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|y_{n_k} - y\|_{\infty} = 0.$$

□

**تذکر ۱.** فرض کنیم شرایط قضیه ۶ برقرار باشد و داشته باشیم:

$$y(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n_k} \sum_{k=1}^i \beta_{ik} f(x_k, y_{n_{k-1}}(x_k), \\ v(y_{n_{k-1}}(x_k)), w(y_{n_{k-1}}(x_k))) \bar{p}_i(x).$$

با توجه به پیوستگی  $f(x, y, v, w)$  و با استفاده از معادله (۱۲) داریم:

$$Ly(x) = f(x, y(x), v(y(x)), w(y(x))).$$

بنابراین با شرایط قضیه ۶ زیردنباله  $\{y_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$  از  $B$  همگراست و حدش جواب معادله (۱۲) است.

اکنون در قضیه زیر با لحاظ کردن شرط وجود و یکتایی جواب را اثبات می کنیم که دنباله  $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$  به جواب (۱۵) به طور یکنواخت همگراست.

**قضیه ۷.** هرگاه شرایط قضیه ۶ برقرار و همچنین جواب معادله (۱۲) موجود و یکتا باشد، آنگاه داریم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n - y\| \rightarrow 0.$$

### ۵ آزمایش‌های عددی

در این قسمت دو مثال آورده شده است تا کارایی این روش در حل معادلات انتگرال-دیفرانسیل غیرخطی با یک شرط انتگرالی را نشان دهیم. برای نشان دادن دقت جواب تقریبی خطای زیر را گزارش می‌کنیم:

$$e_n^{(i)} \approx \max_{1 \leq i \leq n} |y^{(i)}(x_i) - y_n^{(i)}(x_i)|, \\ i = 0, 1, 2, \dots, m-1.$$

مثال ۱. معادله انتگرال-دیفرانسیل

$$y'(x) = g(x) + \tau e^x y(x) \int_0^1 e^{s-x} y(s) ds$$

$$+ \int_0^x (s-x) y^\tau(s) ds, 0 \leq x \leq 1,$$

$$g(x) = -\frac{1}{6} x^6 + \frac{1}{5} (x+2) x^5 - \frac{1}{4} (\tau x + 1) x^4 \\ + \frac{1}{3} x^3 + (\tau - 2e) x^2 + (\tau e - 1) x + 1,$$

را با شرط انتگرالی:

$$y(0) - \int_0^1 s^\tau (\tau - 3s) y(s) ds = 0.$$

در نظر بگیرید. جواب دقیق این مسئله  $y(x) = x - x^\tau$  است. با انتخاب نقاط گرهی

$\left\{ x_i = \frac{i}{n} \right\}_{i=1}^n$  و به‌کارگیری روش پیشنهادی می‌توانیم

جواب تقریبی را برای معادله مذکور به‌دست آوریم. در جدول ۱، مقادیر خطای بیشینه گویای این مطلب است که روش پیشنهادی برای یافتن جواب‌های تقریبی با درجه دقت بالا مناسب است. در شکل ۱ تقریب‌های

$y_{\tau\delta}^{(i)}, i=0, 1$  در فضای  $W_\tau^\tau[0, 1]$  نشان داده شده است.

که در آن  $\alpha_{m-k-1}, k=0, 1, \dots, m-2$  ثابت‌های

$$h = \max_{1 \leq i \leq n-1} (x_{i+1} - x_i)$$

برهان.  $\varepsilon > 0$  را به دلخواه انتخاب می‌کنیم. اکنون در زیربازه  $[0, 1] \supset [X_j, X_{j+1}]$  با استفاده از قضیه ۸، برای مقادیر  $n$  به اندازه کافی بزرگ داریم:

$$|y^{(m-\tau)}(x) - y_n^{(m-\tau)}(x)| \\ \leq |y^{(m-\tau)}(x) - y^{(m-\tau)}(x_j)| \\ + |y_n^{(m-\tau)}(x_j) - y_n^{(m-\tau)}(x)| + \varepsilon. \quad (18)$$

از آنجا که  $y^{(m-\tau)}(x) \in_c W_\tau^m[0, 1]$  بنابراین  $\kappa \geq 0$  موجود است به‌طوری‌که:

$$|y^{(m-\tau)}(x) - y^{(m-\tau)}(x_j)| \leq \kappa h. \quad (19)$$

با توجه به رابطه زیر:

$$y_n^{(m-\tau)}(x_j) - y_n^{(m-\tau)}(x) = \int_x^{x_j} y_n^{(m-1)}(t) dt,$$

ثابت حقیقی مثبت  $\lambda$  موجود است، به‌طوری‌که:

$$|y_n^{(m-1)}(x_j) - y_n^{(m-1)}(x)| \leq \lambda h. \quad (20)$$

بنابراین با استفاده از رابطه‌های (۱۸)، (۱۹) و (۲۰) داریم:

$$|y^{(m-\tau)}(x) - y_n^{(m-\tau)}(x)| \leq \varepsilon + \gamma h. \quad (21)$$

می‌دانیم که:

$$y^{(k)}(x) - y_n^{(k)}(t) \\ = y^{(k)}(x_j) - y_n^{(k)}(x_j) \\ + \int_{x_j}^x (y^{(k+1)}(t) - y_n^{(k+1)}(t)) dt \\ , k = 0, 1, \dots, m-3. \quad (22)$$

اکنون با استفاده از رابطه‌های (۲۱) و (۲۲) و به‌کارگیری قضیه‌های ۷ و ۸ اثبات کامل است.  $\square$



$$y'(x) = g(x) + \int_0^1 sy^\tau(s)ds$$

$$+ \int_0^x (s-x)y^\tau(s)ds, 0 \leq x \leq 1,$$

$$g(x) = -e^{-x+1} - \frac{15}{4} + 4e - \frac{1}{2}e^\tau$$

$$- 2ex + \frac{1}{2}e^\tau x + \frac{1}{2}x^\tau + \frac{1}{4}e^{-2x+2},$$

را با شرط انتگرالی:

$$y(0) - \frac{(1-e)}{(2-e)} \int_0^1 y(s)ds = 0.$$

در نظر می‌گیریم. جواب دقیق این مسئله  
 $y(x) = 1 - e^{-x+1}$  است.

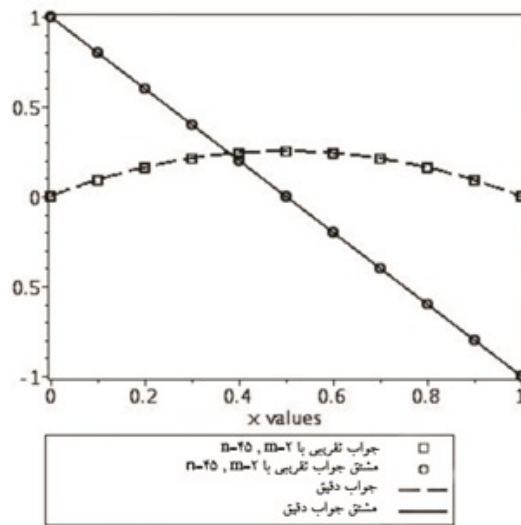
با انتخاب نقاط گرهی  $\left\{x_i = \frac{i}{n}\right\}_{i=1}^n$  و

به‌کارگیری روش پیشنهاد شده، می‌توانیم جواب تقریبی را برای معادله مذکور به‌دست آوریم. در جدول ۲، مقادیر خطای بیشینه، گویای این مطلب است که روش پیشنهادی برای یافتن جواب‌های تقریبی با درجه دقت بالا مناسب است. در شکل ۲ تقریب‌های  $y_{55}^{(i)}, i=0,1,2$  در فضای  $W_\tau^r[0,1]$  نشان داده شده است.

جدول ۱. خطای ماکزیمم گسسته جواب در فضای

$W_\tau^r[0,1]$  (مثال ۱).

$n$	$e_n(y_n \in_c W_\tau^r)$	$e'_n(y_n \in_c W_\tau^r)$
۳۰	$8.721 \times 10^{-5}$	$6.721 \times 10^{-4}$
۳۵	$2.491 \times 10^{-5}$	$4.801 \times 10^{-4}$
۴۰	$2.491 \times 10^{-5}$	$4.893 \times 10^{-4}$
۴۵	$4.199 \times 10^{-6}$	$2.982 \times 10^{-5}$

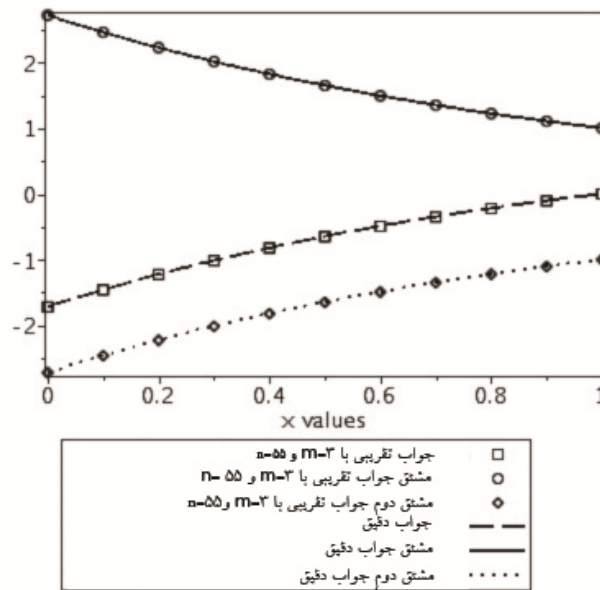


شکل ۱. تقریب‌های  $y_{45}^i, i=0,1$  در فضای  $W_\tau^r[0,1]$  (مثال ۱).

مثال ۲. معادله انتگرال-دیفرانسیل

جدول ۲. خطای ماکزیمم گسسته جواب در فضای  $W_\tau^r[0,1]$  (مثال ۲).

$n$	$e_n(y_n \in_c W_\tau^r)$	$e'_n(y_n \in_c W_\tau^r)$	$e''_n(y_n \in_c W_\tau^r)$
۴۰	$5.657 \times 10^{-5}$	$7.413 \times 10^{-4}$	$4.803 \times 10^{-3}$
۴۵	$8.394 \times 10^{-6}$	$7.341 \times 10^{-4}$	$4.415 \times 10^{-3}$
۵۰	$2.283 \times 10^{-6}$	$6.655 \times 10^{-5}$	$2.132 \times 10^{-3}$
۵۵	$3.091 \times 10^{-6}$	$1.612 \times 10^{-5}$	$8.193 \times 10^{-4}$



شکل ۲. تقریب‌های  $y_{55}^i, i=0,1,2$  در فضای  $W_3^2[0,1]$  (مثال ۲)

## ۶ بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله به منظور یافتن جواب تقریبی از معادلات انتگرال-دیفرانسیل غیرخطی همراه با شرط انتگرالی در فضای  $W_3^m[0, T]$  روش هسته بازتولید هیلبرت را به کار بردیم. با توجه به آنچه در قسمت‌های قبلی از فصل بحث شد، نتایج زیر را داریم:

(الف) هسته بازتولید فضای جواب  $W_3^m[0, 1]$  در شرط انتگرالی مسئله صدق می‌کند.

(ب) در حل مسائل غیرخطی نمی‌توان جواب را به طور مستقیم از رابطه (۱۱) به دست آورد بنابراین دنباله

تکراری (۱۲) را پیشنهاد کردیم و نشان دادیم جواب تقریبی و مشتقات آن به جواب دقیق و مشتقات آن همگرایی یکنواخت است.

(ج) خطای تقریب را در فضای هسته بازتولید  $W_3^m[0, 1]$  به دست آوردیم و نشان دادیم که همگرایی روش برای جواب تقریبی و مشتقات آن  $O(h^{m-k-1})$  از مرتبه  $y_n^k, k=0,1,2,\dots,m$  است.

(د) نتایج به دست آمده از آزمایشات عددی گویای این مطلب است که روش پیشنهادی در حل معادلات انتگرال-دیفرانسیل غیرخطی همراه با شرط انتگرالی بسیار خوب عمل می‌کند.

## References

[1] N. Aronszajn, Theory of reproducing kernels. Trans. Am. Math. Soc., 68 (1950) 337-404.

[2] Y. Zhou, M. Cui, Y. Lin, Numerical algorithm for parabolic problems with non-Classical conditions, J. Comput. Appl. Math., 230 (2009) 770-780.

- [3] Y. Zhou, M. Cui, Y. Lin, W. Jiang, M. Cui, Y. Lin, Anti-periodic solutions for Rayleigh-type equations via the reproducing kernel Hilbert space method, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 15 (2010) 1754-1758.
- [4] F. Geng, M. Cui, A reproducing kernel method for solving nonlocal fractional boundary value problems, *Appl. Math. Lett.*, 25 (2012) 818-823.
- [5] F.Z. Geng, X. M. Li, A New Method for Riccati Differential Equations Based on Reproducing Kernel and Quasilinearization Methods, *Abstr. Appl. Anal.* (2012) 1-8.
- [6] M. Cui, F. Geng, A computational method for solving one-dimensional variable-coefficient Burgers equation, *Appl. Math. Comput.*, 188 (2007) 1389-1401.
- [7] F. Geng, M. Cui, Solving a nonlinear system of second order boundary value problems, *J. Math. Anal. Appl.*, 327 (2007) 1167-1181.
- [8] X. Lv, M. Cui, An efficient computational method for linear fifth-order two-point boundary value problems, *J. Comput. Appl. Math.*, 234 (2010) 1551-1558.
- [9] O.A. Arqub, M. Al-Smadi, N. Shawagfeh, Solving Fredholm integro-differential equations using reproducing kernel Hilbert space method, *Appl. Math. Comput.*, 219 (2013) 8938-8948.
- [10] M. Inc, A. Akgül, F. Geng, Reproducing Kernel Hilbert Space Method for Solving Bratu's Problem, *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.*, 38 (2014) 271-287.
- [11] M. Ghasemi, M. Fardi, R. Khoshsiar Ghaziani, Numerical solution of nonlinear delay differential equations of fractional order in reproducing kernel Hilbert space, *Appl. Math. Comput.*, 268 (2015) 815-831.
- [12] M. Fardi, M. Ghasemi, R. Khoshsiar Ghaziani, The Reproducing Kernel Method for Some Variational Problems Depending on Indefinite Integrals, *Mat. Model. Anal.*, 21 (2016) 412-429.
- [13] M. Fardi, M. Ghasemi, Solving nonlocal initial-boundary value problems for parabolic and hyperbolic integro-differential equations in reproducing kernel hilbert space, *Numer. Method. Partial. Differ. Equ.*, 3 (2016) 174-198.
- [14] S. Vahdati, M. Fardi, M. Ghasemi, Option pricing using a computational method based on reproducing kernel, *J. Comput. Appl. Math.*, 328 (2018) 252-266.
- [15] B. Han, Reproducing Kernel Methods for Solving Inverse Problems, *J. Appl. Comput. Math.*, 1 (2012) 1-4.
- [16] M. Inc, A. Akgül, A. Kiliçman, Explicit Solution of Telegraph Equation Based on Reproducing Kernel Method, *J. Funct. Spaces*, (2012) 1-23.