

## بررسی شبیه‌سازی کارایی برآورد موجک توابع روند تحت وابستگی دراز مدت

نرگس حسینیون<sup>۱\*</sup>، نجمه علمشاهی<sup>۲</sup>

۱. استادیار، گروه آمار، دانشگاه پیام نور

۲. دانشجویی، گروه آمار، دانشگاه پیام نور

تاریخ دریافت: ۱۳۹۶/۱۰/۱۴ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۷/۰۳/۲۶

## The Study of the Simulation of the Efficiency of Wavelet Estimation of Trend Functions under Long-term Dependence Errors

N. Hosseinioun<sup>\*1</sup>, N. Alamshahi<sup>2</sup>

1. Assistant Professor, Department of Statistics, PayameNoor University

2. Ms.C, Department of Statistics, PayameNoor University

Received: 2018/01/04 Accepted: 2018/06/16

### Abstract

In this paper, we examine the estimation for trend functions in a time series model with Gaussian dependent residues with the aid of wavelet techniques. Using the simulations on the five different test functions and the process and taking into account the desired function, the factors affecting the error in our estimation have been discussed. The results show that the error rate of the wavelet method depends on the long-term dependence length. Finally, according to our simulations, the wavelet estimator method is compared with the so called classical methods of Kernel estimation and the results revealed that Wavelet estimations are more efficient.

### Keywords

Long Term Dependency, Threshold, Trend Function, Wavelets.

### چکیده

در این مقاله برآوردی برای توابع روند در یک مدل سری زمانی با باقیمانده‌های وابسته گوسی با تکنیک موجک بررسی شده است. با استفاده از شبیه‌سازی‌های انجام شده روی پنج تابع آزمون متفاوت و یک فرآیند  $FARIMA(0, d, 0)$  و در نظر گرفتن تابع روند مورد نظر، عوامل مؤثر بر ایجاد خطا در برآورد معرفی و بررسی شده‌اند. نتایج نشان می‌دهد که میزان خطای روش موجک وابسته به طول وابستگی بلند مدت است. با توجه به شبیه‌سازی‌های انجام شده، روش برآوردکننده موجکی در مقایسه با روش‌های کلاسیک برآورد هسته‌ای برای توابع روند برای مدل‌های سری‌های زمانی با حافظه-دراز مدت کارا تر تشخیص داده شده و ویژگی‌های آن بررسی شده است.

### واژگان کلیدی

وابستگی دراز مدت، آستانه، تابع روند، موجک.

## مقدمه

صرف نظر از اینکه بیش از دو دهه از ورود موجک‌ها به حوزه علم آمار نمی‌گذرد، نتایج علمی بی‌شماری درباره نقش موجک در شاخه‌های متفاوت آمار به رشته تحریر درآمده است. امروزه نظریه جدید موجک‌ها و مدول‌های موجکی تقریب، جایگزین نظریه‌های کلاسیک از جمله روش کلاسیک نظریه فوریه برای حل مسائل مختلف کاربردی در زلزله‌شناسی، پردازش سیگنال‌ها در سیستم‌ها، پزشکی، مهندسی و... شده است و مراکز صنعتی و آزمایشگاهی تحقیقاتی سعی در به‌کارگیری روش‌های مؤثر تقریب موجکی برای بالا بردن کیفیت محصولات و دقت آزمایش‌های خود دارند. مقالات متعددی در زمینه سری‌های زمانی وجود دارد که در آنها از مفهوم تبدیل پیوسته و گسسته موجک استفاده شده است. موجک‌ها ابزاری انعطاف‌پذیر با محتوای غنی ریاضی و توانایی بالا در کاربرد هستند و برای تحلیل یک تابع نوسانی از زمان یا مکان که موجک‌ها را می‌توان با لنزهای یک دوربین مقایسه کرد که این امکان را فراهم می‌سازد که هم تصاویر مناظر وسیع را ثبت کرد و هم بر جزئیات بسیار ریز که در حالت عادی از چشم انسان پنهان است، متمرکز شد. از دید تاریخی، اولین بار، موجک، در مطالعات آماری در ابتدای قرن نوزدهم توسط دونوه و جانستون<sup>[۱۰]</sup> استفاده شد. در دهه گذشته بسیاری نتایج علمی درباره نقش موجک در شاخه‌های متفاوت علمی به رشته تحریر درآمده است. در واقع موجک‌ها، توابع یک‌معامده هستند که از اتساع و انتقال یک موجک اصلی بنام موجک مادر حاصل می‌شوند. اساس روش تبدیل موجکی، اتساع (فشرده کردن) و انتقال (لغزاندن) تابع موجکی روی سیگنال یا تابع تحت بررسی است.

## تعریف ۱: تابع $\psi \in L_2(\mathbb{R})$ را یک موجک

می‌نامیم، چنانچه در شرط پذیرش<sup>۲</sup> زیر صدق کند:

$$0 < c_\psi = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty, \quad (۱)$$

تبدیل موجک پیوسته تابع  $f \in L_2(\mathbb{R})$  نسبت به این موجک، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$W\{f\}(\lambda, t) = \frac{1}{\sqrt{c_\psi}} |\lambda|^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \psi\left(\frac{u-t}{\lambda}\right) du, \quad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, t \in \mathbb{R}. \quad (۲)$$

## تعریف ۲: تابع $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ موجک یک‌معامده<sup>۳</sup>

نامیده می‌شود اگر خانواده  $\{\psi_{j,k}\}$  تعریف شده در (۱) پایه یک‌معامده  $L^2(\mathbb{R})$  باشد؛ یعنی،

$$\langle \psi_{j,k}, \psi_{i,l} \rangle = \delta_{j,i} \delta_{k,l}, \quad j, k, i, l \in \mathbb{Z} \quad (۳)$$

و هر  $f$  در  $L^2(\mathbb{R})$  به صورت  $f(t) = \sum_{j,k=-\infty}^{\infty} c_{j,k} \psi_{j,k}(t)$  نمایش داده می‌شود؛ به طوری که سری تعریف شده در  $L^2(\mathbb{R})$  همگرا باشد، یعنی

$$\lim_{M_1, N_1, M_2, N_2 \rightarrow \infty} \left\| f - \sum_{j=-M_1}^{N_1} \sum_{k=-M_2}^{N_2} c_{j,k} \psi_{j,k} \right\|_2 = 0. \quad (۴)$$

یکی از ساده‌ترین روش‌های کاهش خطا در برآوردهای موجکی، **آستانه‌ای کردن**<sup>۴</sup> نام دارد. در برآورد موجکی تابع چگالی به روش خطی از یک سطح به بعد، تمامی ضرایب موجک حذف می‌شوند و به همین دلیل نوسانات گسترده‌ای در تابع مورد نظر شکل می‌گیرد. به بیان دیگر ضرایب  $d_{j,k}$  و  $\beta_{j,k}$  که نقش آنها کنترل چنین نوساناتی است، از یک سطح به بعد نادیده گرفته می‌شوند. بنابراین طبیعی است که به جای حذف همه ضرایب موجک به دنبال روشی برای انتخاب زیرمجموعه‌ای از ضرایب موجک در هر سطح باشیم؛ این عمل منجر به معرفی روشی به نام **آستانه‌ای کردن یا آستانه‌سازی یا آستانه‌گیری** می‌شود. بررسی‌ها در این زمینه نشان می‌دهد که روش‌های آستانه‌ای کردن موجک نتایج بهتری نسبت به روش‌های خطی دارند. آستانه‌ای کردن، یک روش غیرخطی است که

3. Orthonormal Wavelet  
4. Thresholding

1. Donoho and Jahnstone  
2. Admissibility Condition

می‌کند، زیرا که ضرایب بزرگ‌تر را به مقدار آستانه کاهش می‌دهد. بدیهی است که نوع آستانه انتخاب شده تأثیر زیادی در دقت برآوردگر حاصل دارد؛ بدین ترتیب که یک آستانه بزرگ ممکن است قسمت مهمی از تابع تحت بررسی را حذف کند و بالعکس مقدار کوچک آن باعث ورود اغتشاش در برآورد شود. بنابراین، روش‌های انقباض موجکی به دلیل سازگاری آن با پرش‌ها و نوسان‌های جزئی و سایر ویژگی‌های غیر عادی در تابع چگالی مورد نظر، یک روش نوظف‌زایی (رفع اغتشاش) است. برای مطالعه انواع مختلف آستانه‌ها می‌توانید به ویداکوویک [۲۴] مراجعه کنید.

### وابستگی دراز مدت

تاریخچه مبحث وابستگی دراز مدت به عنوان یک پدیده عینی، ابتدا، در دهه ۱۹۶۰، با یک سری از مقالات مندلبرات<sup>۲</sup> [۲۲ و ۲۱ و ۲۰ و ۱۹ و ۱۸] و همکارانش بررسی شد؛ با آن که پیش از آن بررسی‌های تجربی شده بود. هرست<sup>۳</sup> [۱۴ و ۱۵] جریان آب در رودخانه نیل را به عنوان یک مثال کاربردی از این مفهوم مطالعه کرد. مفهوم وابستگی دراز مدت از میان بسیاری از نقطه نظرها مورد بحث قرار گرفت و به عنوان یک رویکرد جدید پیشنهاد شد. تعدادی از موضوعات مشابه نیز مجدداً مورد بحث قرار گرفتند، از جمله مباحثی در ارتباط با فرآیندهای نامانا، نظریه ارگودیک، فرآیندهای خود متشابه و فرآیندها تفاضلی کسری، قضایای حد و... در سال‌های اخیر، مسئله برآوردگرهای آماری بر اساس داده‌های وابسته دراز مدت، مورد توجه قرار گرفته و از آن جمله می‌توان به برن [۴]، اشاره کرد. کوانش و همکاران [۱۷] نوشته‌اند که: «شاید باورنکردنی باشد که بسیاری از این مشاهدات که شامل سری‌های اندازه‌گیری شده با کیفیت بالا از ستاره‌شناسی، فیزیک، شیمی است، به طور کلی به عنوان نمونه‌های *i.i.d* مورد توجه بوده‌اند». مشاهدات مستقل نیستند؛ اما به صورت دراز مدت به هم وابسته‌اند. بر اساس شواهد تجربی بدست آمده از وابستگی دراز مدت در اندازه‌گیری‌ها و برنامه‌های کاربردی دیگر، مطالعه و بررسی اینکه چگونه وابستگی دراز مدت برآوردگرهای آماری را تحت تأثیر قرار می‌دهد، حائز اهمیت قرار گرفت. همچنین اغلب تعاریف وابستگی دراز

روی ضرایب موجک عمل می‌کند. در این روش هر یک از ضرایب موجک با یک آستانه مقایسه می‌شوند که اگر قدر مطلق آن کمتر از آستانه باشد، صفر می‌شود و در غیر این صورت، بر اساس قانون آستانه‌ای به کار رفته، نگه داشته یا تغییر می‌کند. در حقیقت نقش آستانه این است که ضرایب کوچک، که اغلب اغتشاش هستند را از ضرایب بزرگ که نشان‌دهنده ویژگی‌های مهم تابع و سیگنال می‌باشند، متمایز می‌سازد. در اینجا ابتدا بسط تابع  $g$  را در  $[0, 1]$  به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$g(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} s_{jk} \phi_{jk}(t) + \sum_{j=0}^M \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{jk} \psi_{jk}(t), M < 2^j - 1, \quad (5)$$

برآوردگر خطی<sup>۱</sup> و بریده شده آن به صورت

$$\hat{g}(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{s}_{jk} \phi_{jk}(t) + \sum_{j=0}^M \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{d}_{jk} \psi_{jk}(t)$$

تعریف می‌شود و در آن ضرایب موجکی به صورت زیر برآورد می‌شوند:

$$\hat{s}_{jk} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i \phi_{jk}(t_i) \quad , \quad \hat{d}_{jk} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i \psi_{jk}(t_i). \quad (6)$$

دسته وسیعی از برآوردگرهای آماری از نوع برآوردگرهای بریده شده هستند. عملکرد برآوردگرهای بالا، به انتخاب  $M$  بستگی دارد. اگر مقدار آن کوچک انتخاب شود برآورد به دست آمده به اندازه کافی هموار نخواهد بود و بالعکس اگر  $M = J - 1$ ، آنگاه تقریباً از تمام مشاهدات استفاده می‌شود. روش‌های مختلف آستانه‌ای کردن، برحسب اینکه مقدار آستانه چگونه اختیار شود، متفاوت‌اند. معمول‌ترین نوع آستانه‌ها، آستانه نرم و سخت هستند. ثابت می‌شود که استفاده از یک آستانه سخت باعث ایجاد واریانس بزرگ‌تر در برآورد به دست آمده می‌شود و می‌تواند ناپایدار شود؛ درحالی‌که آستانه نرم آریبی بیشتری ایجاد

2. Mandelbrot  
3. Hurst

1. Linear Estimator

### تعاریف بنیادی

فرض کنید  $\phi(t)$  و  $\psi(t)$ ، به ترتیب، موجک‌های پدر و مادر با محل فشرده  $[0, N]$  برای برخی  $N \in \mathbb{N}$  باشند و

$$\int_0^N \phi(t) dt = \int_0^N \phi^2(t) dt = \int_0^N \psi^2(t) dt = 1, \quad (10)$$

و برای هر  $J \geq 0$ ، دستگاه  $\{\phi_{jk}, \psi_{jk}, k \in \mathbb{Z}, j \geq 0\}$  با

$$\begin{aligned} \psi(0) = \psi(N) = 0 \\ \psi_{jk}(t) = N^{\frac{1}{2}} 2^{\frac{j}{2}} \psi(N2^{j+j}t - k) \\ \phi_{jk}(t) = N^{\frac{1}{2}} 2^{\frac{j}{2}} \phi(N2^j t - k), \end{aligned} \quad (11)$$

یک پایه یکامتعامل در  $L^2(\mathbb{R})$  می‌باشد. توجه کنید به خاطر کلیت، محل  $\phi$  و  $\psi$  به جای  $[0, 1]$  به صورت  $m_\psi \in \mathbb{N}$  انتخاب می‌شوند. در سرتاسر مقاله،  $d_\psi$  دلالت بر تعداد گشتاورهای صفر<sup>۷</sup> دارد، بدین معنی که،

$$\int_0^N t^k \psi(t) dt = 0, \quad k = 0, \dots, m_\psi - 1 \quad (12)$$

و

$$\int_0^N t^{m_\psi} \psi(t) dt = v_{m_\psi} \neq 0. \quad (13)$$

برای هر تابع  $g \in L^2([0, 1])$  و هر  $J \geq 0$  بسط موجک متعامد<sup>۸</sup> را به صورت زیر داریم:

$$g(t) = \sum_{k=-N+1}^{N2^J-1} s_{jk} \phi_{jk}(t) + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=-N+1}^{N2^{j+1}-1} d_{jk} \psi_{jk}(t). \quad (14)$$

به طوری که

مدت بر مبنای ویژگی‌های مرتبه دوم فرآیندهای تصادفی و مرتبط با فرآیندهای خود متشابه می‌باشند. وابستگی درازمدت و حافظه بلند مفاهیم مترادفی هستند، که مسلماً بسیار مهم هستند.

**تعریف ۳:** فرض کنیم که خطاها مانا و  $f(\lambda)$  چگالی طیفی بوده و خطاها به طور پی‌پی همبسته باشند. فرض می‌کنیم  $r(i)$  همبستگی بین  $\mathcal{E}_j$  و  $\mathcal{E}_{j+i}$  باشد. فرآیند خطا را وابسته دراز مدت نامیم، هرگاه برای برخی

$$c > 0 \quad 0 < \alpha < 1 \quad (7)$$

(به عنوان مثال کاکس<sup>۱</sup> [۷] را ببینید). آنگاه  $r(j)$ ،  $|j|^{-\alpha}$  می‌باشد. وابستگی درازمدت گاهی حافظه درازمدت یا خود-تشابهی مجانبی مرتبه دوم<sup>۲</sup> نامیده است.

**تعریف ۴:** فرض کنید  $X_t$  یک فرآیند مانا باشد. عدد حقیقی  $\alpha \in (0, 1)$  و ثابت  $C_\rho > 0$  وجود دارند به طوری که

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\rho(k)}{c_\rho k^{-\alpha}} = 1, \quad (8)$$

آنگاه  $X_t$  یک فرآیند مانا با حافظه دراز مدت<sup>۳</sup> یا وابستگی دراز مدت یا وابستگی قوی<sup>۴</sup> یا یک فرآیند مانا با میرایی ضعیف<sup>۵</sup> یا همبستگی‌های دراز مدت<sup>۶</sup> نامیده می‌شود. **تعریف ۵:** فرض کنید  $X_t$  یک فرآیند مانا باشد و عدد حقیقی  $\alpha \in (0, 1)$  و ثابت  $C_f > 0$  وجود داشته باشند به طوری که

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(\lambda)}{c_f |\lambda|^{-\alpha}} = 1, \quad (9)$$

آنگاه  $X_t$  یک فرآیند مانا با حافظه درازمدت یا وابستگی درازمدت یا وابستگی قوی نامیده می‌شود.

7. Vanishing Moment  
8. Orthogonal Wavelet Expansion

1. Cox  
2. Second-Order Asymptotic Self-Similarity  
3. Long- Memory  
4. Strong Dependence  
5. Slowly Decaying  
6. Long-Range Correlations

کران بالا کران بهینه برآوردگرهای موجکی است که تاکنون در مقالات محاسبه شده است. زمانی که از آستانه صرف نظر شود، عبارات مجانبی کامل برای  $MISE$  و جوابی بهین طبق قضیه دوم زیر داده می‌شود.

**قضیه دوم.** تحت فرضیات قضیه اول و آستانه  $\delta_j = 0$  ( $0 \leq j \leq q$ ) روابط زیر برقرارند:

(i) اگر  $C_\psi^2 > (2^\alpha - 1)C_\phi^2$ ، آنگاه با پارامتر همواری به صورت زیر

$$q^* = \left[ \frac{\alpha}{2r + \alpha} \log_2 n + C^*(r, \alpha, \psi, g^{(r)}) \right] - J^*$$

و با سطوح تجزیه  $J^*$  که در

$$2^{J^*} = o\left(n^{\frac{\alpha}{2r + \alpha}}\right)$$

بهین به فرم زیر می‌باشد:

$$MISE = A_1(r, \alpha, \psi) A_2(r, \alpha, \psi, g^{(r)}) \cdot n^{-\frac{2r\alpha}{2r + \alpha}} + o\left(n^{-\frac{2r\alpha}{2r + \alpha}}\right) \quad (17)$$

علاوه بر این، اگر  $\Delta_n(g, C_\psi) = 0$  آنگاه

$$q^* = \left[ \frac{\alpha}{2r + \alpha} \log_2 n + \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\rho(k) C^*(r, \alpha, \psi, g^{(r)})}{c_\rho k^{-\alpha}} \right] - J^* - 1$$

نیز  $MISE$  را مینیمم می‌سازد.

$$MISE (ii) \text{ اگر } (2^\alpha - 1)C_\phi^2 < C_\psi^2$$

مجانبی با  $J$  به صورت زیر مینیمم می‌شود:

$$J^* = \left[ \frac{\alpha}{2r + \alpha} \log_2 n + C^*(r, \alpha, \phi, g^{(r)}) \right] + 1 \quad (18)$$

$$s_{jk} = \int_0^1 g(t) \phi_{jk}(t) dt, \quad d_{jk} = \int_0^1 g(t) \psi_{jk}(t) dt,$$

که ضرایب موجک تابع  $g$  هستند. یک برآوردکننده موجک آستانه<sup>۱</sup> ( $s_{jk}$ ) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\hat{g}(t) = \sum_{k=-N+1}^{N 2^j - 1} \hat{s}_{jk} \phi_{jk}(t) + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=-N+1}^{N 2^{j+1} - 1} \hat{d}_{jk} I(|\hat{d}_{jk}| > \delta_j) \psi_{jk}(t); \quad (15)$$

به طوری که  $J$ ،  $q$  و  $\delta_j$ ، به ترتیب، دلالت بر سطح

تجزیه، پارامتر هموارسازی و آستانه دارند و ضرایب  $\hat{s}_{jk}$  و  $\hat{d}_{jk}$  به صورت زیر داده می‌شوند:

$$\hat{s}_{jk} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i \phi_{jk}(t_i), \quad \hat{d}_{jk} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i \psi_{jk}(t_i);$$

**قضیه اول.** فرض کنید  $g \in C^r[0,1]$  یک تابع لیگ

اندازه‌پذیر، محمل آن به صورت

$$\sup(g^{(r)}) = \{t \in [0,1]: g^{(r)}(t) \neq 0\}$$

فرآیند  $\varepsilon_i$  گوسی و با ساختار کوواریانس

$$\gamma(k) = E(\varepsilon_i \varepsilon_{i+k}) \sim C_\gamma |k|^{-\alpha} \quad k \rightarrow \infty$$

به گونه‌ای است که  $m_\psi = r$ . آنگاه، کران  $MISE$

برآوردگر موجک با آستانه سخت در (۱۴) به صورت زیر به

دست می‌آید:

$$MISE_{opt} = O\left(n^{-\frac{2r\alpha}{2r + \alpha}}\right). \quad (16)$$

معادله بالا عملاً با استفاده از انتخاب خاص

$J$ ،  $q$ ،  $\delta_j$  و  $C$  به دست می‌آید. در مواردی که از آستانه

صرف نظر شود، عبارات مجانبی کامل برای  $MISE$  و

جوابی بهین طبق قضیه دوم زیر داده می‌شود. دقت کنید که

و [۲۳] در حالی که مدل  $Y(t) = S(t) + X(t)$  همان معادله  $Y(t) = T(t) + X(t)$  است، در کل  $S(t)$  ملزم به هموار بودن نمی‌باشد و در نتیجه به خوبی می‌تواند ناپیوستگی‌ها و یا تغییرات سریع را در برداشته باشد. ایده کلی تجزیه و تحلیل روند با موجک‌ها وابسته به ضرایب مقیاس با روند  $T(t)$  و ضرایب موجک با مؤلفه اغتشاش  $X(t)$  است. برای انجام آنالیز موجک، فرض می‌کنیم  $\phi(t)$  تابع موجک مقیاسی به صورت  $\phi(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \phi(2t - k)$  باشد، به طوری که  $\phi(t - k)$  برای  $k \in \mathbb{Z}$  مجموعه یکامعامدی از توابع است؛ بدین معنی که  $\int \phi(t - k) \phi(t - l) dt = 0$  اگر  $k \neq l$  و در جاهای دیگر صفر باشد. آنگاه تابع موجک طبق معادله  $\psi(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k c_{1-k} \phi(2t - k)$  تعریف می‌شود. با این فرض که  $\phi_{j,k}(t) = 2^{-\frac{j}{2}} \phi(2^{-j}t - k)$  و  $\psi_{j,k}(t) = 2^{-\frac{j}{2}} \psi(2^{-j}t - k)$  تبدیل موجک پیوسته سری زمانی انتگرال‌پذیر مربعی  $Y(t)$  شامل ضرایب مقیاس و ضرایب موجک

$$\alpha_{J,k} = \int \phi_{J,k}(t) Y(t) dt, \quad \beta_{j,k} = \int \psi_{j,k}(t) Y(t) dt, \quad j = J, J+1, \dots,$$

باشد؛ به طوری که  $k \in \mathbb{Z}$ . می‌توان  $Y(t)$  را با استفاده از این ضرایب تبدیل و براساس (۳) و (۴) به فرم زیر نوشت:

$$Y(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_{J,k} \phi_{J,k}(t) + \sum_{j=-\infty}^J \sum_{k \in \mathbb{Z}} \beta_{j,k} \psi_{j,k}(t). \quad (20)$$

سری زمانی را در تعداد متناهی از زمان‌ها  $t_n$  مشاهده می‌کنیم؛ بدین معنی که، داریم:

$$Y(t_n) = T(t_n) + X(t_n), \quad n = 0, \dots, N-1, \quad (21)$$

$$\hat{g}(t) = \sum_{k=-N+1}^{N2^J-1} \hat{S}_{Jk} \phi_{Jk}(t) \quad (19)$$

با  $J = J^*$  و نهایتاً  $MISE$  بهین به فرم زیر می‌باشد:

$$MISE = A_3(r, \alpha, \phi) A_2(r, \alpha, \psi, g^{(r)}) n^{-\frac{2r\alpha}{2r+\alpha}} + o\left(n^{-\frac{2r\alpha}{2r+\alpha}}\right) \quad (20)$$

علاوه بر این، اگر  $\Delta_n(g, C_\phi) = 0$  آنگاه

$$J^* = \left\lceil \frac{\alpha}{2r+\alpha} \log_2 n + C^*(r, \alpha, \phi, g^{(r)}) \right\rceil$$

نیز  $MISE$  را مینیمم می‌سازد. برای بررسی‌های بیشتر درباره مراحل برهان قضایای اول و دوم به [۶] مراجعه شود. حال بر اساس نتایج نظری بالا تلاش خواهد شد بهینگی برآوردگر موجک در برآورد تابع روند در مطالعات شبیه‌سازی نیز بررسی شود. قبل از ورود به هدف ذکر شده ابتدا درباره مدل تحت مطالعه بررسی‌های زیر را داریم:

### مدل تحت بررسی

فرض می‌کنیم  $Y(t)$  مقدار یک سری زمانی قابل مشاهده در زمان  $t$  باشد، به طوری که مقادیر  $t$  پیوسته باشند. در این حالت  $Y(t)$  از دو بخش کاملاً متفاوت تشکیل شده است، روند  $T(t)$  و یک مؤلفه تصادفی  $X(t)$  (که گاهی اوقات آن را فرآیند اغتشاش یا نوفه سفید نامیم). به طوری که

$$Y(t) = T(t) + X(t), \quad (19)$$

که فرض می‌شود مقدار امید ریاضی  $X(t)$  صفر است. هیچ تعریف دقیق پذیرفته شده‌ای برای روند وجود ندارد؛ اما معمولاً از آن به عنوان یک تابع هموار غیر تصادفی (قطعی) که نشان‌دهنده جابه جایی و حرکت دراز مدت یا تغییرات سیستماتیک در یک سری است، صحبت می‌شود (پرستلی<sup>۲</sup>

1. White Noise  
2. Priestley

ثابت و میانگین صفر باقی بمانند. از این رو جملات خطا را به صورت یک سری زمانی مانا می‌توان بررسی کرد که وابستگی بلند مدت دارد. در این راستا مدل FARIMA<sup>۷</sup> و یا به استناد برخی متون ARFIMA با پارامتر جمعی به صورت کسری مناسب خواهد آمد. در این مقاله هدف ما، برآورد موجک بهینه مجانبی توابع روند تحت وابستگی دراز مدت است. بدین منظور و با توجه به مطالب بالا، فرض می‌کنیم داده‌های سری زمانی را به صورت مدل زیر مشاهده کنیم:

$$Y_i = g(t_i) + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (۲۳)$$

با  $t_i = \frac{i}{n}$  و  $g \in L^2([0,1])$  و  $\varepsilon_i$  یک گوسین (نرمال) میانگین - صفر<sup>۸</sup> فرآیند مانای مرتبه دوم با وابستگی دراز مدت است. در اینجا، وابستگی دراز مدت برای ثوابت  $\alpha \in (0,1)$  و  $C_\gamma > 0$ ، طبق رابطه زیر مشخص می‌شود:

$$\gamma(k) = E(\varepsilon_i \varepsilon_{i+k}) \sim C_\gamma |k|^{-\alpha}, \quad k \rightarrow \infty \quad (۲۴)$$

### بررسی شبه‌سازی

در این قسمت به بررسی کیفیت کاربرد مطالب گفته شده در بالا پرداخته شده است.  $R$  نرم‌افزاری با قابلیت‌های محاسباتی برجسته است که مورد توجه بسیاری از محققین حوزه علم آمار قرار گرفته است. در این راستا نیز برای انجام شبه‌سازی‌های مورد نظرمان از این نرم‌افزار بهره برده‌ایم.

### تولید داده

برای تولید داده‌ها با آن چه در بخش‌های قبل بیان گردید، متغیر مورد بررسی یک متغیر با توزیع یکنواخت از بازه  $[0,1]$  با اندازه  $2^k$  با نقاط پرش به صورت  $\frac{i}{n}$  است. پنج تابع به شکل‌هایی که در شکل ۱ آمده است و فرآیند  $FARIMA(0, d, 0)$  با جملات خطای  $\varepsilon_i$  برای

به طوری که فقط به  $t_n < t_{n+1}$  نیاز داریم؛ بدین معنی که، فاصله بین مشاهدات می‌تواند نامنظم باشد. برای توضیحات بیشتر در زمینه بالا می‌توانید کریگمیل و پرسیوال<sup>۱</sup> [۹] را ببینید. در رگرسیون پارامتری با طرح‌های ثابت، نتایج مجانبی برای درست‌نمایی ماکسیمم و برآوردگرهای حداقل مربعات تحت وابستگی دراز مدت توسط یاجیما<sup>۲</sup> [۲۶] پایه‌گذاری شد. کوانش<sup>۳</sup> و همکاران [۱۷] نشان دادند که برای تجزیه و تحلیل خاصی از مدل‌های واریانس با طرح‌های تصادفی، مقایسه‌ها را می‌توان در همان نرخ تحت خطاهای مستقل برآورد کرد. نتایج مجانبی برای برآورد پارامترهای با وابستگی درازمدت، تحت مدل‌های پارامتری داده می‌شوند، به عنوان مثال، برن<sup>۴</sup> [۳] را ببینید. در رگرسیون ناپارامتری، اثر وابستگی درازمدت روی مقادیر مینیماکس همگرایی در مقاله‌ای توسط هال و هارت<sup>۵</sup> [۱۲] برای یک کلاس تابع مشتق‌پذیر مطالعه شد و بعد از آن توسط ونگ [۲۵] و جانستون و سیلورمن [۱۶] برای کلاس‌های بسو<sup>۶</sup>، تحت یک طرح ثابت هم فاصله انجام شد. جانستون و سیلورمن نشان دادند زمانی که یک پارامتر وابستگی نامعلوم به طور مناسب و درست برآورد می‌شود، برآوردگر آستانه موجک منطبق با دو پارامتر وابستگی و پارامترهای هموارسازی است.

با توجه به این مطالب اخیر که در مقاله تحت بررسی، با فرض اینکه داده‌ها دارای وابستگی بلند مدت است، داریم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(\varepsilon_i \varepsilon_j) = c |k|^{-\alpha}, \quad c > 0, i \neq j \quad (۲۲)$$

از این رو باید با توجه به این که  $E(\varepsilon) = 0$  و  $Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = E(\varepsilon_i \varepsilon_j)$  و چون این  $Cov$  مربوط به یک متغیر (خطاها) در لگ‌های متفاوت است، پس باید تابع اتوکواریانس آن دارای وابستگی بلند مدت باشد. همچنین، چون تمام روند ممکن باید در تابع  $g$  غیرخطی خلاصه شود، باید از ایجاد هر گونه روندی در میانگین و واریانس جلوگیری کرد تا جملات خطا وابسته، با واریانس

1. Craigmile and Percival
2. Yajima
3. KuËnsch
4. Beran
5. Hall and Hart
6. Besov

7. Fractional ARIMA  
8. Gaussian zero- Mean

برآوردهایی که در اینجا توابع روند مورد نظر به کمک آنها، برآورد می‌شوند توابع زیر هستند:

• برآوردکننده موجک با آستانه سخت،  $q$  و  $J$  که در آن

$$\delta_j^2 = \frac{4eC_{\psi}^2 N^{-1+\alpha} (\ln n)^2}{n^{\alpha} 2^{(J+j)(1-\alpha)}} \quad (q^* < j \leq q)$$

• برآوردکننده موجک با آستانه نرم تعریف شده طبق  $\text{sign}(\hat{d}_{jk}) (|\hat{d}_{jk}| - \lambda_n) I\{|\hat{d}_{jk}| > \lambda_n\}$  و آستانه‌های مینیماکس  $\lambda_n = (2 \log n)^{\frac{1}{2}}$  (جانستون و سیلورمن [۱۶]).

• برآوردکننده هسته‌ای<sup>۶</sup> با هسته مستطیلی<sup>۷</sup>  $K(x) = \frac{1}{2} I\{x \in [-1, 1]\}$  و کران بهینه مجانبی  $b_{opt} = C_{opt} n^{\frac{2d-1}{5-2d}}$  به طوری که

$$C_{opt} = \left( \frac{9(1-2d)\beta(d)C_f}{I(g'')} \right)^{\frac{1}{5-2d}},$$

$$\beta(d) = \frac{2^{2d} \Gamma(1-2d) \sin(\pi d)}{d(2d+1)}$$

(هال و هارت [۱۲]، برن و فنگ [۵] را ببینید).

### برازش مدل و محاسبه برآوردها

همان گونه که بیان شد، در این شبیه‌سازی سه نوع توزیع بر اساس سه مقاله مختلف که همگی مشابه بوده‌اند، لحاظ شده‌اند. پایه‌های مورد استفاده در این شبیه‌سازی، موجک‌های پدر و مادر داوینچی با ۲، ۴، ۶، ۸ یا ۱۰ نقطه پرش هستند. جهت برقراری روابط و هموارسازی بیشتر، باید حجم نمونه‌ها عددی در نمای ۲ باشد، از این رو نمای دو در این شبیه‌سازی برابر با ۷ تا ۱۴ در نظر گرفته شده است. از طرفی برای هر نمونه و هر تابع پایه و هر وابستگی، در هر تابع مورد بررسی ۴۰۰ نمونه تولید شده است.

بررسی انتخاب شده‌اند. توجه کنید که  $\alpha = 1 - 2d$ . توابع آزمون عبارت‌اند از:

• تابع سینوسی<sup>۱</sup>:

$$g_1(t) = 10 \sin(4\pi t);$$

• تابع جهش سینوسی<sup>۲</sup>:

$$g_2(t) = 10 \sin(4\pi t) + \Delta I \left\{ \frac{5}{8} < t < \frac{7}{8} \right\} \quad (\Delta > 0)$$

• تابع نوک تیز<sup>۳</sup>:

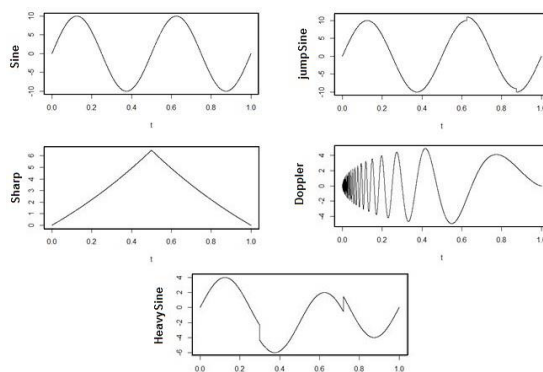
$$g_3(t) = 10 [\exp(tI\{t < 0.5\} + (1-t)I\{t > 0.5\}) - 1]$$

• تابع داپلر<sup>۴</sup>:

$$g_4(t) = 10 [t(1-t)]^{\frac{1}{2}} \sin \left[ 2\pi \frac{1+0.05}{t+0.05} \right]$$

• تابع سنگین سینوسی<sup>۵</sup>:

$$g_5(t) = 4 \sin(4\pi t) - \text{sign}(t-0.3) - \text{sign}(0.72-t)$$



شکل ۱. توابع مورد بررسی در شبیه‌سازی

1. Sine Function
2. Jump Sine Function
3. Sharp Function
4. Doppler Function
5. Heavy sine Function

6. Kernel Estimator  
7. Rectangular Kernel



## نتایج حاصل از شبیه‌سازی

در این قسمت موارد زیر بررسی می‌شود:

۱. نحوه تغییر خطای برآورد در انواع مدل‌ها
۲. عوامل مؤثر بر خطا
۳. مدل‌سازی خطا

رفتار برآوردگر موجک بهینه را به دو گروه رفتار دسته‌بندی کرد:

۱. رفتاری که برآوردگر با توابع Sine و Sharp دارد؛
۲. رفتاری که برآوردگر با توابع Jump Sine و Heavy Sine دارد.

همچنین براساس همین نمودارها می‌توان گفت، این برآوردگر بهترین رفتار خود را در تابع Heavy Sine دارد.

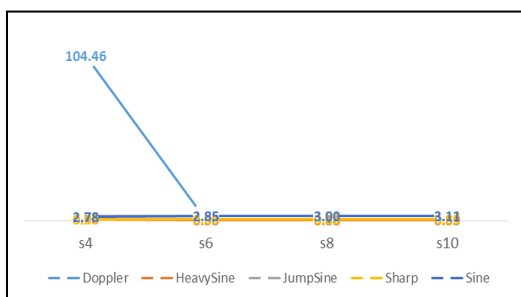
## نحوه تغییر خطای برآورد در انواع مدل‌ها

در این شبیه‌سازی ۶۴۰ نمونه به تفکیک گفته شده در بالا اجرا شده و خروجی به دست آمده از هر مرحله ناشی از برآورد ۴۰۰ نمونه‌ای از برازش مدل بوده است. در این بررسی‌ها به تفکیک هر تابع مدل‌ها رفتارهای متفاوتی داشته‌اند. روند تغییرات خطای برآورد بهینه بر اساس اندازه نمونه و توابع مختلف در جدول ۲ آورده شده است.

از طرفی اندازه نمونه به تنهایی در این روش برای بیان نیکویی مدل مناسب نیست، زیرا انتظار می‌رفت که با افزایش اندازه نمونه، خطای برآورد کاهش یابد ولی این موضوع با توجه به ستون آخر جدول ۲ برقرار نیست. می‌توان این عدم برقراری سازگاری را مربوط به تابع مورد بررسی نیز دانست. زیرا، در تابع داپلر، روند نزولی در برخی از اندازه‌های نمونه برقرار نیست. همچنین، با حذف داده‌های مربوط به تابع داپلر از شکل ۲ روند نزولی در این نمونه‌ها برقرار می‌شود. برای بررسی‌های بیشتر برن و شامیگو [۵] را ببینید. جدول ۳ متوسط خطای برآورد موجک به ازای مقادیر مختلف وابستگی موجود در داده‌ها را در برآورد موجک نشان می‌دهد.

با توجه به اعداد سطر آخر واضح است که تغییرپذیری وابستگی داده‌ها تغییرات مشهودی ایجاد کرده است. با کمی اغماض می‌توان گفت که با افزایش وابستگی به مشاهدات پیشین، برآوردگر موجک برازش بهتری دارد. حال باید بررسی شود که آیا این برآوردگر به نوع پایه انتخابی حساس است یا نه. با توجه به سطر آخر جدول ۴ مشخص است، توابع هموار داونینچی، بهتر عمل می‌کنند. همچنین مشاهده می‌شود، این رفتار برآوردگر در توابع مختلف نیز حفظ می‌شود. رفتار برآوردگر موجک در پایه‌های مختلف در شکل ۲ بررسی شده است.

بار دیگر مشاهده می‌شود که این برآوردگر به تابع داپلر به شدت حساسیت نشان می‌دهد. می‌توان گفت، شاید بتوان



شکل ۲. بررسی رفتار برآوردگر موجک با پایه‌های مختلف

نکته‌ای دیگر که در این بررسی وجود دارد این است که در برآورد به وسیله تابع کرنل مستطیلی بهینه شده، خطای نظری همواره بیشتر از خطای تجربی بوده است در حالی که این وضعیت درباره برآوردگر موجک بهینه با تغییراتی همراه است و تقریباً در نیمی از حالات بیشتر و نیمی دیگر کمتر بوده است. چون تمامی عوامل مورد بررسی در این شبیه‌سازی نسبت به تابع مورد برازش اثر می‌گرفته‌اند از این‌رو، این متغیر را به عنوان متغیر مداخله‌ای مدل بررسی شناخته و اثر آن را به وسیله شرطی کردن، از بین می‌بریم. در ادامه رفتار توأم تمام متغیرهای این بررسی به تفکیک تک تک توابع تشریح می‌شود.

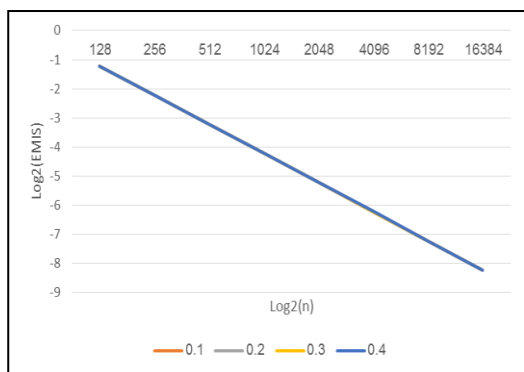
## الف) تابع Sine

در این تابع، اختلاف نسبی خطای نظری و خطای مشاهده شده در پایه‌های مختلف در نمونه نسبت به خطای تجربی به شرح جدول ۵ است. لازم به ذکر است که علامت منفی در تمام این بررسی به معنای آن است که خطای نظری کمتر بوده است و علامت مثبت به معنای آن است که خطای نظری بیش از مقدار مشاهده شده در جامعه بوده است. از طرفی با توجه به کاهش یافتن تعداد مقادیر منفی در طول افزایش حجم نمونه، به نظر می‌رسد، ضرایب

### ج) تابع Jump Sine

جهت رعایت تلخیص، اختلاف نسبی خطای نظری و خطای مشاهده شده در نمونه نسبت به خطای تجربی در این تابع را به جدول موجود در [۱] ارجاع می دهیم.

لازم به ذکر است که به طور مشابه علامت منفی در تمام این بررسی به معنای آن است که خطای نظری کمتر بوده است و علامت مثبت به معنای آن است که خطای نظری بیش از مقدار مشاهده شده در جامعه بوده است. از طرفی با توجه به کاهش یافتن تعداد مقادیر منفی در طول افزایش حجم نمونه، به نظر می رسد، ضرایب همبستگی بین متغیرهای اندازه نمونه و تابع پایه در وابستگی های یکسان و اندازه نمونه و طول وابستگی در پایه های یکسان از نظر رگرسیونی روی مقادیر خطای برآورد، در برآورد تابع Jump Sine منفی باشد، به این معنا که با کاهش اندازه نمونه،

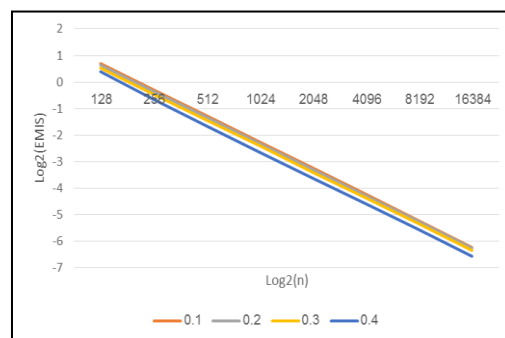


شکل ۴. روند کاهش خطا در برآورد موجک بهینه

خطای مورد انتظار برای برآورد موجک بیشتر می شود. همچنین مقادیر عددی آن نیز به شرح جدول موجود در [۱] است. همچنین این موضوع از نظر مقداری نیز به شرح جدول [۱] است. مشاهده می شود که این مقادیر زیاد هم بزرگ نیستند و اختلاف آن مانع از برآورد و استفاده از این برآورد نمی شود.

شکل ۵ نشان می دهد که روند کاهش برای هر وابستگی در این تابع به وجود آمده است.

همبستگی بین متغیرهای اندازه نمونه و تابع پایه در وابستگی های یکسان و اندازه نمونه و طول وابستگی در پایه های یکسان از نظر رگرسیونی روی مقادیر خطای برآورد، در برآورد تابع Sine منفی باشد، به این معنا که با کاهش اندازه نمونه، خطای مورد انتظار برای برآورد موجک بیشتر می شود. همچنین این موضوع از نظر مقداری نیز به شرح جدول ۶ است. مشاهده می شود که این مقادیر هر چند به خوبی نظری خود نیستند ولی زیاد هم بزرگ نیستند. شکل ۳ نشان می دهد که روند کاهش برای هر وابستگی در این تابع به وجود آمده است.



شکل ۳. روند کاهش خطای تجربی با افزایش اندازه نمونه و در طول وابستگی های مختلف

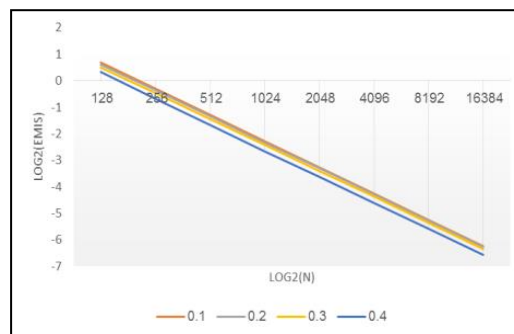
### ب) تابع Sharp

در این تابع، اختلاف نسبی خطای نظری و خطای مشاهده شده در نمونه نسبت به خطای تجربی به شرح جدول [۱] است.

لازم به ذکر است که علامت منفی در تمام این بررسی به معنای آن است که خطای نظری کمتر بوده است و علامت مثبت به معنای آن است که خطای نظری بیش از مقدار مشاهده شده در جامعه بوده است. چون هیچ مقدار منفی در جدول وجود ندارد، به این معنا است که همواره خطای مشاهده کمتر از خطای مورد انتظار بوده است. همچنین این موضوع از نظر مقداری نیز به شرح جدول [۱] است.

نکته مهم این است که در تمام وابستگی های این تابع نرخ کاهش خطا ثابت است (شکل ۴).

رگرسیون روی مقادیر خطای برآورد، در برآورد تابع Heavy Sine منفی باشد، به این معنا که با کاهش اندازه نمونه، خطای مورد انتظار برای برآورد موجک بیشتر می‌شود. برای بررسی بیشتر به [۱] مراجعه شود. مشاهده می‌شود که این مقادیر هرچند به خوبی نظری خود نیستند ولی زیاد هم متفاوت نیستند. شکل ۶ روند کاهشی خطای برآورد را در این حالت نشان می‌دهد:



شکل ۵. روند کاهشی وابستگی‌های مختلف در خطای برآورد

### ح) تابع Doppler

در این تابع، اختلاف نسبی خطای نظری و خطای مشاهده شده در نمونه نسبت به خطای تجربی به شرح جدول [۱] است.

لازم به ذکر است که باز هم علامت منفی در تمام این بررسی به معنای آن است که خطای نظری کمتر بوده و علامت مثبت به معنای آن است که خطای نظری بیش از مقدار مشاهده شده در جامعه بوده است. از طرفی با توجه به اینکه اکثر مقادیر منفی اند، به این معناست که همواره خطای مشاهده بیشتر از خطای مورد انتظار بوده است. همچنین این موضوع از نظر مقداری نیز به شرح جدول ۱۴ است.

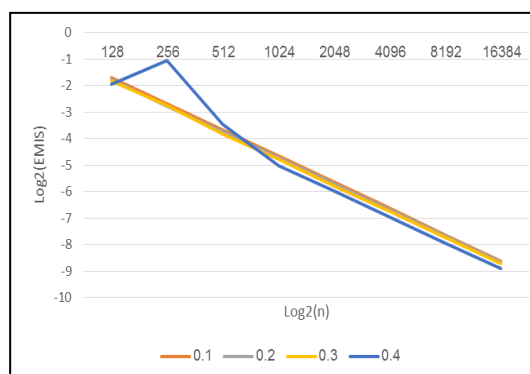
مشاهده می‌گردد که این مقادیر هرچند به خوبی نظری و مورد انتظار برای خود نیستند ولی خطای آن بسیار زیاد هم نیست و شاید بتوان از آن چشم‌پوشی کرد. با توجه به شکل ۷ مشاهده می‌شود که بی‌ثباتی در روند کاهش واضح است.

### بررسی عوامل مؤثر بر خطا

در این قسمت با یک بررسی عاملی عوامل مؤثر بر رخداد خطا بررسی می‌شود. در این راستا برای بررسی میزان همبستگی عوامل با خطای مشاهده شده از رگرسیون گام به گام بهره برده شده است. در آن راستا، تنها نوع تابع مورد بررسی و میزان طول وابستگی مهم شناسایی شده است. متغیرهای تحت بررسی در جدول در [۱] آورده شده است.

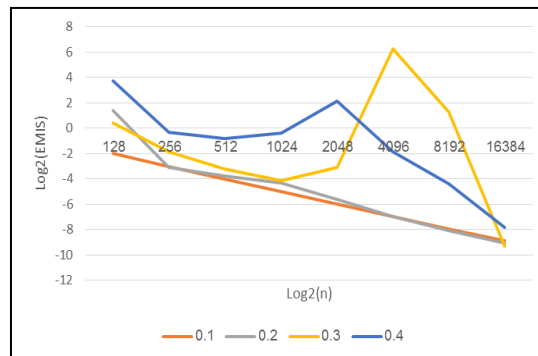
### د) تابع Heavy Sine

در این تابع، اختلاف نسبی خطای نظری و خطای مشاهده شده در نمونه نسبت به خطای تجربی به شرح جدول در [۱] است. لازم به ذکر است که علامت منفی در تمام این بررسی به معنای آن است که خطای نظری کمتر بوده و علامت مثبت به معنای آن است که خطای نظری بیش از مقدار مشاهده شده در جامعه بوده است. از طرفی با توجه به کاهش یافتن تعداد مقادیر منفی در طول افزایش حجم نمونه، به نظر می‌رسد، ضرایب همبستگی بین متغیرهای اندازه نمونه و تابع پایه در وابستگی‌های یکسان و اندازه نمونه و طول وابستگی در پایه‌های یکسان از نظر



شکل ۶. روند کاهشی خطای برآورد در وابستگی‌های مختلف

کد	تابع
1	Doppler
2	Heavy Sine
3	Jump Sine
4	Sharp
5	Sine



مدل سازی خطا

در صورتی هم که بخواهیم با حضور تابع داپلر این بررسی را انجام دهیم باید به مقادیر به دست آمده از تابع فوق، اطلاعات تکمیلی در [۱] آورده است.

### خلاصه نتایج شبیه سازی

در این بررسی، عوامل مؤثر بر ایجاد خطا در موجکها بررسی شود و مشخص گردید که میزان خطای کاربرد موجک بسیار وابسته با طول وابستگی بلندمدت و تابع مورد استفاده است. در برخی از موارد و سامانهها موجک توان تشخیص خوبی نداشته و در برخی از سامانهها، به شدت مناسب است. این نتیجه برای تمام توابعی برقرار است که شرایط لازم را داشته اند. در صورتی که شرایط لازم در تابع رعایت نشود، عدم حضور تابع در خانواده مورد بررسی، عامل جدیدی ایجاد نمی کند، بلکه تنها باعث افزایش خطای مشاهده شده می شود. به عبارتی این وضعیت، تنها باعث ایجاد اریبی می گردد. استنتاج ما از برآوردکننده همچنین می تواند به صورت یک ترکیب دو مؤلفه ای باشد: یک مؤلفه شامل هموارسازی تعداد مشخصی از تجزیه پایین تر سطوح بدون در نظر گرفتن آستانه و مؤلفه دیگر تجزیه بالاتر فیلتر شده توسط آستانه است. مؤلفه نخست منجر به عملکرد مناسب توابع هموار می شود، در حالی که مؤلفه دوم در جهت برآورد ناپیوستگی های تابع مفید است.

شکل ۷. روند کاهش خطا در وابستگی های مختلف

حال با توجه به **Error! Reference source not found.** [۱] باید با شرط بودن در مدل دو متغیر بالا، دو عامل دیگر را بررسی نمود. برای این موضوع ابتدا دو متغیر به صورتی که بتوان از آن سطوح هر سه عامل (دو عامل موجود در جدول [۱] و عامل مورد بررسی) را بتوان به صورت یکتا شناسایی کرد ایجاد نمود. سپس با استفاده از تحلیل عاملی هم اثرات عاملها را بررسی نموده و هم

میزان خطای مشاهده شده بررسی می شود. با توجه به آزمون برابری واریانس لوزن<sup>۱</sup> زیر، می توان فرض برابری واریانس را پذیرفت. همچنین هر دو عامل دیگر مهم بوده و باید در مدل حضور داشته باشند.

همچنین در این بررسی مشخص شد، آنچه باعث تفاوت در اثرات تعدادی شده است، شبیه سازی های اندازه ۲۰۴۸ تابع داپلر با طول وابستگی با اندازه  $d=0.4$  و اندازه ۱۲۸ تابع داپلر با  $d=0.4$  و اندازه ۴۰۹۶ تابع داپلر با  $d=0.3$  بوده است. همچنین در این بررسی مشخص شد که آنچه پایه را معنادار کرده نیز شبیه سازی های مربوط به پایه های داوینچی با دو نقطه پرش و مربوط به تابع داپلر و  $d=0.3$  و  $d=0.4$  بوده است. در این صورت اگر از شبیه سازی تابع داپلر که صرفاً برای بررسی حساسیت در شبیه سازی بوده است، حذف شود، خطا را می توان با استفاده از فرمول  $MISE = 1.73 * d - 0.087 * Fun$  برآورد کرد. کدهای توابع نیز به این صورت بوده است:

منابع

- [۱] علم شاهی، نجمه (۱۳۹۵). برآورد بهینه مجانبی موجک توابع روند تحت وابستگی دراز مدت، دانشگاه پیام نور مرکز مشهد.
- [2] Bardet, J.M., Lang, G., Moulines, E. and Soulier, P. (2000). Wavelet estimator of long-range dependent processes. *Stat. Inference Stoch. Process.* 3 85–99. MR1819288.
- [3] Beran, J. (1986). Estimation, testing and prediction for self-similar and related processes. Doctoral thesis, ETH, Zurich.
- [4] Beran, J. (1994). *Statistics for Long-Memory Processes*. London: Chapman and Hall. MR1304490.
- [5] Beran, J. and Feng, Y. (2002). SEMIFAR models – a semiparametric framework for modeling trends, long-range dependence and nonstationarity. *Comput. Statist. Data Anal.* 40 393–419. MR1924017.
- [6] Beran, J. and Shumeyko, Y. (2012). On asymptotically optimal wavelet estimation of trend functions under long-range dependence. *Bernoulli*, 2012, Vol. 18, No. 1, 137–176.
- [7] Box, G.E.P. and Jenkins, G.M. (1970) *Time series analysis: forecasting and control*. Holden Day, San Francisco.
- [8] Cox, D.R. (1984). Long-range dependence: a review. In H.A. David and H.T. David (eds), *Statistics: An Appraisal*. Proceedings of a Conference Marking the 50th Anniversary of the Statistical Laboratory, Iowa State University, pp. 55±74. Ames: Iowa State University Press.
- [9] Craigmile, Peter F. and Percival, Donald B. Wavelet-Based Trend Detection and Estimation. WA 98195–4322. WA 98195–5640. WA 98109–3044.
- [10] Donoho, D.L. and Johnstone, I.M. (1992). Minimax estimation via wavelet shrinkage. Technical Report No.402, Department of Statistics, Stanford University, to appear in *Ann Statist.* 1997.
- [11] Granger, C.W.J. and Joyeux, R. (1980). An introduction to long-range time series models and fractional differencing. *J. Time Ser. Anal.*, 1, 15±30.
- [12] Hall, P. and Hart, J.D. (1990a). Nonparametric regression with long-range dependence. *Stochastic Process. Appl.*, 36, 339±351.
- [13] Hosking, J.R.M. (1981). Fractional differencing. *Biometrika*, 68, 165±176.
- [14] Hurst, H. (1951): Long-term storage capacity of reservoirs. *Transactions of the American Society of Civil Engineers* 116:770–808.
- [15] Hurst, H. (1955). Methods of using long-term storage in reservoirs. *Proceedings of the Institution of Civil Engineers, Part I*: 519–577.
- [16] Johnstone, I.M. and Silverman, B.W. (1997) Wavelet threshold estimators for data with correlated noise. *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B*, 59, 319±351.
- [17] KuÈensch, H., Beran, J. and Hampel, F. (1993) Contrasts under long-range correlations. *Ann. Statist.*, 21, 943±964.
- [18] Mandelbrot, B. (1965). “Une classe de processus stochastiques homothetiques a soi; application a loi climatologique de H. E. Hurst,” *Comptes Rendus Academic Sciences Paris*, vol. 240, pp. 3274–3277.
- [19] Mandelbrot, B. and Van Ness, J. “Fractional Brownian motions, fractional noises and applications,” *SIAM Review*, vol. 10, pp. 422–437, 1968.
- [20] Mandelbrot, B. and Wallis, J. (1968). “Noah, Joseph and operational hydrology,” *Water Resources Research*, vol. 4, pp. 909–918.

- [21] Mandelbrot, B. and Taqqu, M. (1979). "Robust R/S analysis of long-run serial correlation," in Proceedings of the 42nd Session of the International Statistical Institute, pp. 69–104, Manila: Bulletin of the I.S.I.
- [22] Mandelbrot, B. (1983). The Fractal Geometry of Nature. San Francisco: W. H. Freeman and Co. [22] Priestley, M. B. (1981). Spectral Analysis and Time Series. (Vol. 1): Univariate Series. London: Academic Press.
- [23] Vidakovic, B. (1999). Statistical Modeling by Wavelets. New York: Wiley. MR1681904.
- [24] Wang, Y. (1996). Function estimation via wavelet shrinkage for long-memory data. Ann. Statist. 24 466–484. MR1394972.
- [25] Yajima, Y. (1991). Asymptotic properties of LSE in a regression model with long-memory stationary errors. Ann. Statist., 19, 158±177.