زیر رده‌های خاص از توابع دو–مقداری وابسته به عملگر کوماتو

سمیرا رهروی[۱،*]، حسین پیری[۲]

۱. استادیار، گروه ریاضی، دانشگاه بناب
۲. دانشیار، گروه ریاضی، دانشگاه بناب

تاریخ دریافت: ۱۳۹۶/۰۵/۰۳ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۶/۱۱/۱۴

Certain subclasses of bi-univalent functions associated with Komatu operator

Samira Rahrovi[1,*], Hossein Piri[2]

1. Assistant Professor, Department of Mathematics, University of Bonab
2. Associate Professor, Department of Mathematics, University of Bonab

Received: 7/25/2017 Accepted: 2/3/2018

Abstract: In the present paper, we introduce and investigate new subclasses of the function class Σ of bi-univalent functions defined on the open unit disk U which are associated with the Komatu operator. Furthermore, we find some estimations on the coefficients $|a_2|$ and $|a_3|$ for functions in these new subclasses. Several new consequences of the results are also pointed out.

Keywords: bi-univalent function, Starlike function, Convex function of order α, Komatu operator, Salagean operator.

چکیده: فرض کنیم Σ رده توابع دو–مقداری تعریف شده در قرص یکه U باشد. در این تحقیق زیررده‌های جدیدی از توابع رده Σ وابسته به عملگر کوماتو را معرفی نموده و تقریبی برای ضرایب $|a_۲|$ و $|a_۳|$ می‌یابیم. همچنین نتایج جدیدی وابسته به رده‌های مذکور را به‌دست می‌آوریم.

کلمات کلیدی: تابع دو–مقداری، تابع ستاره‌گون، تابع محدب از مرتبه‌ی α، عملگر کوماتو، عملگر سالاگین.

۱ مقدمه

A را رده توابع تحلیلی بر قرص یکه $U=\{z\in\mathbb{C}:|z|<۱\}$ به فرم زیر در نظر بگیرید:

$$f(z)=z+\sum_{n=۲}^{\infty}a_nz^n \qquad (۱)$$

فرض کنید زیررده S از A، زیر رده توابع تک‌مقداری بر U باشد. تابع $f\in S$ ستاره‌گون از مرتبه α $(۰\le\alpha<۱)$ در U نامیده می‌شود، هرگاه

$$\operatorname{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)>\alpha.$$

این رده با نماد $S^*(\alpha)$ نشان داده می‌شود. تابع $f\in A$ محدب از مرتبه α بر U نامیده می‌شود، هرگاه

$$\operatorname{Re}\left(۱+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)>\alpha.$$

$K(\alpha)$ برای نمایش چنین رده‌ای به کار برده می‌شود.

*Corresponding author: sarahrovi@gmail.com
*نویسنده مسئول

اخیراً کوماتو[1] [۱]، عملگر انتگرالی L_a^λ را به فرم زیر معرفی نموده است:

$$L_a^\lambda f(z)=\frac{a^\lambda}{\Gamma(\lambda)}\int_0^1 t^{a-2}\left(\log\frac{1}{t}\right)^{\lambda-1} f(zt)dt, \quad z\in U, a>0, \lambda\geq 0 \tag{۲}$$

لذا، اگر $f\in A$ دارای نمایشی به فرم $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n$ باشد، به سادگی از رابطه (۲) داریم:

$$L_a^\lambda f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{a}{a+n-1}\right)^\lambda a_n z^n, \quad a>0, \lambda\geq 0$$

تذکر ۱. از نمایش عملگر L_a^λ به فرم سری می‌توان عملگر L_a^λ را برای هر λ حقیقی تعریف نمود [۲]. همچنین از تعریف عملگر L_a^λ به فرم سری، رابطه زیر به سادگی حاصل می‌شود:

$$z\left(L_a^{\lambda+1}f(z)\right)'=aL_a^\lambda f(z)-(a-1)L_a^{\lambda+1}f(z), \quad a>0, \lambda\geq 0$$

توجه شود که:

(الف) برای $a=1$ و $\lambda=k$ (kعدد صحیح دلخواه) عملگر ضربی $L_1^\lambda=I^k$ به‌دست می‌آید که توسط فلت[2] [۳] و سالاگین[3] در [۴] بررسی شده است.

(ب) برای $a=1$ و $\lambda=-k$ $k\in\mathbb{N}_0=\{0,1,2,\dots\}$ عملگر دیفرانسیل $L_1^{-k}=D^k$ معروف به عملگر سالاگین [۴] به‌دست می‌آید.

(ج) برای $a=2$ و $\lambda=k$ (kعدد صحیح دلخواه) عملگر $L_2^k=L^k$ به‌دست می‌آید که توسط رالجدی[4] و سومانتا[5] در [۵] بررسی شده است.

(د) برای $a=2$، عملگر ضربی $L_2^\lambda=I^\lambda$ حاصل می‌گردد که توسط جونگ[6] و همکاران در [۶] بررسی شده است.

برای هر $f\in S$، قضیه‌ی $\frac{1}{4}$-کوبه بیان می‌کند که تصویر U تحت f، شامل قرصی به شعاع $\frac{1}{4}$ است. بنابراین هر تابع تک‌مقداری $f\in S$ دارای معکوسی مانند f^{-1} است که برای هر $z\in U$ در شرایط زیر صدق می‌کند:

$$f^{-1}(f(z))=z, \qquad z\in U$$

و

$$f\left(f^{-1}(w)\right)=w, \quad |w|<r(f),\ r(f)\geq\frac{1}{4}.$$

تعریف ۱. هرگاه توابع f و f^{-1} در U تک‌ارز باشند، تابع $f\in A$ دو-مقداری نامیده می‌شود. رده توابع دو-مقداری را با Σ نشان می‌دهیم.

اگر نگاشت f معرفی شده در رابطه (۱)، یک تابع دو-مقداری باشد، آنگاه با فرض $g=f^{-1}$ و انجام عملیات ساده داریم:

$$\begin{aligned} g(w)=w-a_2w^2+(2a_2^2-a_3)w^3\\ -(5a_2^3-5a_2a_3+a_4)w^4+\cdots \end{aligned} \tag{۳}$$

رده توابع دو-مقداری در قرص U را لوین[1] در [۷] معرفی نمود و نشان داد که برای هر

[1] Komatu
[2] Flett
[3] Salagean
[4] Uralegaddi
[5] Somantha
[6] Jung

$f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n\in\Sigma$ داریم $|a_2|<1/51$. بر این اساس، برانان[2] و کلونیه[3] [۸] برای هر $f\in\Sigma$، حدس $|a_2|\le\sqrt{2}$ را مطرح نمودند. نتانیاهو[4] [۹] نشان داد که برای هر $f\in\Sigma$ داریم $|a_2|=\frac{4}{3}$. همچنین برانان و تاها[5] [۱۰] زیررده‌های خاصی از توابع دو-مقداری مشابه زیررده‌های توابع تک‌مقداری، شامل قویاً ستاره‌گون، ستاره‌گون و محدب را بررسی کردند. آنها رده توابع دو-ستاره‌گون و دو-محدب را معرفی نمودند و برای ضرایب ابتدایی آن تقریب‌هایی را به‌دست آوردند. اخیراً پژوهشگران بسیاری [۲, ۱۱, ۱۲] کران‌هایی را برای رده‌های متنوعی از توابع دو-مقداری به‌دست آورده‌اند.

متذکر می‌شویم که رده Σ تهی نیست، زیرا توابع

$$z,\frac{z}{1-z},-\log(1-z),\frac{1}{2}\log\frac{1+z}{1-z}$$

عضو رده Σ می‌باشند. با این وجود، تابع کوبه عضو رده Σ نیست.

لم ۱. فرض کنید P خانواده تمام توابع مانند h باشد که بر U تحلیلی است و به‌ازای هر $z\in U$، $\operatorname{Re}\big(h(z)\big)>0$ و

$$h(z)=1+c_1z+c_2z^2+c_3z^3+\cdots.\qquad z\in U$$

اگر $h\in P$، آنگاه $|c_k|\le 2$.

۲ تقریب ضرایب

[1] Lewin
[2] Brannan
[3] Clunie
[4] Netanyahu
[5] Taha

تعریف ۲. فرض کنید $\boldsymbol{\alpha}$، $\boldsymbol{\gamma}$ و $\boldsymbol{\lambda}$ اعداد حقیقی باشد به‌طوری‌که $\lambda\ge 0$، $0<\alpha<1$، $0\le\gamma\le 1$، تابع f توسط رابطه (۱) تعریف شده و $g(w)=f^{-1}(w)$ به فرم (۳) باشد. تابع f را عضو رده $P_\Sigma(\gamma,\alpha,\lambda)$ گوییم، هرگاه در روابط

$$\left|\arg\left\{\frac{z\left(L_a^\lambda f(z)\right)'+\gamma z^2\left(L_a^\lambda f(z)\right)''}{(1-\gamma)L_a^\lambda f(z)+\gamma z\left(L_a^\lambda f(z)\right)'}\right\}\right|<\frac{\alpha\pi}{2},\quad (4)$$

و

$$\left|\arg\left\{\frac{w\left(L_a^\lambda g(w)\right)'+\gamma w^2\left(L_a^\lambda g(w)\right)''}{(1-\gamma)L_a^\lambda g(w)+\gamma w\left(L_a^\lambda g(w)\right)'}\right\}\right|<\frac{\alpha\pi}{2},\quad (5)$$

صدق کند.

قضیه ۱. اگر تابع f در کلاس $P_\Sigma(\gamma,\alpha,\lambda)$ باشد، آنگاه

$$|a_2|\le\frac{2\alpha}{\sqrt{4\alpha(2\gamma+1)\left(\frac{a}{a+2}\right)^{\lambda}-(\gamma+1)^2\left(\frac{a}{a+1}\right)^{2\lambda}(3\alpha-1)}}\quad (6)$$

و

$$|a_3|\le\frac{\alpha}{(2\gamma+1)\left(\frac{a}{a+2}\right)^{\lambda}}+\frac{4\alpha^2}{(\gamma+1)^2\left(\frac{a}{a+1}\right)^{2\lambda}}.$$

برهان. فرض کنید $g=f^{-1}$. چون $f\in P_\Sigma(\gamma,\alpha,\lambda)$، لذا از روابط (۴) و (۵) به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{z\left(L_a^\lambda f(z)\right)'+\gamma z^2\left(L_a^\lambda f(z)\right)''}{(1-\gamma)L_a^\lambda f(z)+\gamma z\left(L_a^\lambda f(z)\right)'}=p(z)^\alpha,\quad (7)$$

و

$$\frac{w\left(L_a^\lambda g(w)\right)'+\gamma w^2\left(L_a^\lambda g(w)\right)''}{(1-\gamma)L_a^\lambda g(w)+\gamma w\left(L_a^\lambda g(w)\right)'}=q(w)^\alpha,\quad (8)$$

که در آن توابع $p(z)$ و $q(w)$ در کلاس P قرار دارند و به‌صورت زیر می‌باشند:

$$p(z)=1+p_1 z+p_2 z^2+\cdots, \qquad (9)$$

و

$$q(w)=1+q_1 w+q_2 w^2+\cdots. \qquad (10)$$

از مساوی قرار دادن ضرایب در روابط (۷) و (۸) روابط زیر نتیجه می‌شوند:

$$(\gamma+1)\left(\frac{a}{a+1}\right)^{\lambda} a_2=\alpha p_1, \qquad (11)$$

$$2(2\gamma+1)\left(\frac{a}{a+2}\right)^{\lambda} a_3-(\gamma+1)^2\left(\frac{a}{a+1}\right)^{2\lambda} a_2^2 =\alpha p_2+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}p_1^2, \qquad (12)$$

$$-(\gamma+1)\left(\frac{a}{a+1}\right)^{\lambda} a_2=\alpha q_1, \qquad (13)$$

$$2(2\gamma+1)\left(\frac{a}{a+2}\right)^{\lambda}(2a_2^2-a_3) -(\gamma+1)^2\left(\frac{a}{a+1}\right)^{2\lambda} a_2^2=\alpha q_2+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}q_1^2. \qquad (14)$$

از روابط (۱۱) و (۱۳) به‌دست می‌آوریم:

$$p_1=-q_1 \qquad (15)$$

$$2(\gamma+1)^2\left(\frac{a}{a+1}\right)^{2\lambda} a_2^2=\alpha^2(p_1^2+q_1^2). \qquad (16)$$

از جمع زدن طرفین روابط (۱۲) و (۱۴) نتیجه می‌شود

$$\left(4\alpha(2\gamma+1)\left(\frac{a}{a+2}\right)^{\lambda}-(\gamma+1)^2\left(\frac{a}{a+1}\right)^{2\lambda}(3\alpha-1)\right)a_2^2 =\alpha^2(p_2+q_2),$$

لذا

$$a_2^2=\frac{\alpha^2(p_2+q_2)}{4\alpha(2\gamma+1)\left(\frac{a}{a+2}\right)^{\lambda}-(\gamma+1)^2\left(\frac{a}{a+1}\right)^{2\lambda}(3\alpha-1)}$$

با به‌کار بردن لم ۱ برای ضرایب p_2 و q_2 به‌دست می‌آوریم:

$$|a_2|\le\frac{2\alpha}{\sqrt{4\alpha(2\gamma+1)\left(\frac{a}{a+2}\right)^{\lambda}-(\gamma+1)^2\left(\frac{a}{a+1}\right)^{2\lambda}(3\alpha-1)}}$$

این رابطه همان کران تعریف شده برای $|a_2|$ در رابطه (۶) است.

حال کران $|a_3|$ را به‌دست می‌آوریم. برای این منظور با تفریق (۱۴) از (۱۲) داریم:

$$4\alpha(2\gamma+1)\left(\frac{a}{a+2}\right)^{\lambda}(a_3-a_2^2)=\alpha(p_2-q_2). \qquad (17)$$

از روابط (۱۵) و (۱۶) و (۱۷) نتیجه می‌شود

$$a_3=\frac{\alpha(p_2-q_2)}{4\alpha(2\gamma+1)\left(\frac{a}{a+2}\right)^{\lambda}}+\frac{\alpha^2(p_1^2+q_1^2)}{2(\gamma+1)^2\left(\frac{a}{a+1}\right)^{2\lambda}}.$$

با به‌کارگیری دوباره لم ۱ برای ضرایب p_2 و q_2 رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$|a_3|\le\frac{\alpha}{(2\gamma+1)\left(\frac{a}{a+2}\right)^{\lambda}}+\frac{4\alpha^2}{(\gamma+1)^2\left(\frac{a}{a+1}\right)^{2\lambda}}.$$

لذا حکم اثبات می‌شود. □

تعریف ۳. فرض کنید $\boldsymbol{\beta}$، $\boldsymbol{\gamma}$ و $\boldsymbol{\lambda}$ اعداد حقیقی باشند به‌طوری که $\lambda\ge 0$، $0\le\gamma\le 1$، $0\le\beta\le 1$، f توسط رابطه (۱) تعریف شده باشد و g توسیع f^{-1} بر U باشد. تابع f عضو رده $H_{\Sigma}(\gamma,\beta,\lambda)$ نامیده می‌شود، هرگاه در روابط

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{z\left(L_a^{\lambda}f(z)\right)'+\gamma z^2\left(L_a^{\lambda}f(z)\right)''}{(1-\gamma)L_a^{\lambda}f(z)+\gamma z\left(L_a^{\lambda}f(z)\right)'}\right\}>\beta, \qquad (18)$$

و

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{w\left(L_a^{\lambda}g(w)\right)'+\gamma w^2\left(L_a^{\lambda}g(w)\right)''}{(1-\gamma)L_a^{\lambda}g(w)+\gamma w\left(L_a^{\lambda}g(w)\right)'}\right\}>\beta, \qquad (19)$$

صدق کند.

قضیه ۲. اگر تابع f، عضو رده $H_\Sigma(\gamma,\beta,\lambda)$ باشد، آنگاه

$$|a_2| \le \frac{\sqrt{1-\beta}}{\sqrt{2(2\gamma+1)\left(\frac{a}{a+2}\right)^{\lambda} - (\gamma+1)^2\left(\frac{a}{a+1}\right)^{2\lambda}}}, \quad (۲۰)$$

و

$$|a_3| \le \frac{(1-\beta)}{(2\gamma+1)\left(\frac{a}{a+2}\right)^{\lambda}} + \frac{4(1-\beta)^2}{(\gamma+1)^2\left(\frac{a}{a+1}\right)^{2\lambda}}. \quad (۲۱)$$

برهان. فرض کنید $f \in H_\Sigma(\gamma,\beta,\lambda)$ و $g = f^{-1}$. از روابط (۱۸) و (۱۹) به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{z\left(L_a^\lambda f(z)\right)' + \gamma z^2\left(L_a^\lambda f(z)\right)''}{(1-\gamma)L_a^\lambda f(z) + \gamma z\left(L_a^\lambda f(z)\right)'} = \beta + (1-\beta)p(z), \quad (۲۲)$$

$$\frac{w\left(L_a^\lambda g(w)\right)' + \gamma w^2\left(L_a^\lambda g(w)\right)''}{(1-\gamma)L_a^\lambda g(w) + \gamma w\left(L_a^\lambda g(w)\right)'} = \beta + (1-\beta)q(w), \quad (۲۳)$$

که در آن توابع $p(z)$ و $q(w)$ به‌ترتیب به فرم (۹) و (۱۰) می‌باشند. با مساوی قرار دادن ضرایب روابط (۲۲) و (۲۳) داریم:

$$(\gamma+1)\left(\frac{a}{a+1}\right)^{\lambda} a_2 = (1-\beta)p_1, \quad (۲۴)$$

$$2(2\gamma+1)\left(\frac{a}{a+2}\right)^{\lambda} a_3 - (\gamma+1)^2\left(\frac{a}{a+1}\right)^{2\lambda} a_2^2 = (1-\beta)p_2, \quad (۲۵)$$

$$-(\gamma+1)\left(\frac{a}{a+1}\right)^{\lambda} a_2 = (1-\beta)q_1, \quad (۲۶)$$

$$2(2\gamma+1)\left(\frac{a}{a+2}\right)^{\lambda}(2a_2^2 - a_3) - (\gamma+1)^2\left(\frac{a}{a+1}\right)^{2\lambda} a_2^2 = (1-\beta)q_2. \quad (۲۷)$$

از روابط (۲۴) و (۲۶) نتیجه می‌شود:

$$p_1 = -q_1. \quad (۲۸)$$

همچنین از (۲۵)، (۲۷) و (۲۸) نتیجه زیر حاصل می‌شود:

$$2(\gamma+1)^2\left(\frac{a}{a+1}\right)^{2\lambda} a_2^2 = (1-\beta)^2(p_1^2+q_1^2), \quad (۲۹)$$

$$4(2\gamma+1)\left(\frac{a}{a+2}\right)^{\lambda} a_2^2 - 2(\gamma+1)^2\left(\frac{a}{a+1}\right)^{2\lambda} a_2^2 = (1-\beta)(p_2+q_2).$$

بنابراین

$$a_2^2 = \frac{(1-\beta)(p_2+q_2)}{2\left(2(2\gamma+1)\left(\frac{a}{a+2}\right)^{\lambda} - (\gamma+1)^2\left(\frac{a}{a+1}\right)^{2\lambda}\right)}.$$

حال با به کار بردن لم ۲، رابطه (۲۰) حاصل می‌شود.

از روابط (۲۵) و (۲۷) داریم:

$$4(2\gamma+1)\left(\frac{a}{a+2}\right)^{\lambda}(a_3 - a_2^2) = (1-\beta)(p_2-q_2),$$

لذا از رابطه (۲۹) به‌دست می‌آوریم:

$$a_3 = \frac{(1-\beta)(p_2-q_2)}{4(2\gamma+1)\left(\frac{a}{a+2}\right)^{\lambda}} + a_2^2 = \frac{(1-\beta)(p_2-q_2)}{4(2\gamma+1)\left(\frac{a}{a+2}\right)^{\lambda}} + \frac{(1-\beta)^2(p_1^2+q_1^2)}{2(\gamma+1)^2\left(\frac{a}{a+1}\right)^{2\lambda}}.$$

حال با بکارگیری دوباره‌ی لم ۱، رابطه (۲۱) حاصل می‌شود و این حکم را اثبات می‌کند. □

References

[1] Y. Komatu, On analytic prolongation of a family of operators, Mathematica (cluj), 32 (1990) 141-145.

[2] R.M. Ali, S.K. Lee, V. Ravichandran, S. Supramaniam, Coefficient estimates for bi-univalent Ma-Minda starlike and convex functions, Appl. Math. Lett., 25 (2012) 344-351.

[3] T.M. Flett, The dual of an inequality of Hardy and Littlewood and some related inequalities, J. Math. Anal. Appl., 38 (1972) 746-765.

[4] G.S. Salagean, Subclasses of univalent functions, in: Complex Analysis-Fifth Romanian-Finnish Seminar, Springer, 1983, pp. 362-372.

[5] B.A. Uralegaddi, C. Somanatha, Certain classes of univalent functions, in: Current topics in analytic function theory, World Scientific, 1992, pp. 371-374.

[6] I.B. Jung, Y.C. Kim, H.M. Srivastava, The Hardy space of analytic functions associated with certain one-parameter families of integral operators, J. Math. Anal. Appl., 176 (1993) 138-147.

[7] M. Lewin, On a coefficient problem for bi-univalent functions, Proc. Am. Math. Soc., 18 (1967) 63-68.

[8] D.A. Brannan, J.G. Clunie, Aspects of Contemporary Complex Analysis (Proceedings of the NATO Advanced Study Institute held at the University of Durham, Durham; July 1–20, 1979), in, Academic Press, New York and London, 1980.

[9] E. Netanyahu, The minimal distance of the image boundary from the origin and the second coefficient of a univalent function in $|z|< 1$, Archive Rational Mech. Anal., 32 (1969) 100-112.

[10] D.A. Brannan, T.S. Taha, On some classes of bi-univalent functions, in: Math. Anal. Appl., Elsevier, 1988, pp. 53-60.

[11] B.A. Frasin, M.K. Aouf, New subclasses of bi-univalent functions, Appl. Math. Lett., 24 (2011) 1569-1573.

[12] Q.-H. Xu, Y.-C. Gui, H.M. Srivastava, Coefficient estimates for a certain subclass of analytic and bi-univalent functions, Appl. Math. Lett., 25 (2012) 990-994.