

حل عددی معادله غیرخطی برگرز با کمک تبدیل کول-هویف

احمدرضا حقیقی^{۱,۲,*}، زهرا عباسی^۳

۱. دانشیار، گروه ریاضی، دانشگاه فنی و حرفه‌ای، تهران
۲. دانشیار، گروه ریاضی کاربردی، دانشگاه صنعتی ارومیه
۳. پژوهشگر، گروه ریاضی کاربردی، دانشگاه صنعتی ارومیه

تاریخ دریافت: ۱۳۹۶/۰۹/۰۱ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۶/۱۱/۱۳

Numerical solution of the non-linear Burgers equations using Hopf-Cole transformation

Ahmadreza Haghghi^{1,2,*}, Zahra Abbasi³

1. Associate Professor, Department of Mathematics, Technical and Vocational University (TVU), Tehran
2. Associate Professor, Department of Mathematics, Urmia University of Technology
3. Researcher, Department of Mathematics, Urmia University of Technology

Received: 11/22/2017

Accepted: 2/2/2018

Abstract: The main purpose of this article is devoted to the numerical solution of coupled one and two-dimensional non-linear Burgers equations with suitable initial and boundary conditions, by using Hopf-Cole transformation and two techniques (LFDM) and (CN-DF). In fact, using a non-linear Cole-Hopf transformation the one and two-dimensional non-linear Burgers equations are reduced to diffusion equations. Then, the logarithmic finite-difference technique (LFDM) is used to discretize the diffusion equation, and the resulting equation is solved by (CN-DF) scheme. In the end, comparison of the numerical results from the change of various factors such as viscosity and the measurement of the error, and the proper functioning of the numerical method and its adaptation to the analytical solution are evident.

Keywords: Burgers equation, Hopf-Cole transformation, Logarithmic finite-difference technique, Crank-Nicolson-Du Fort and Frankel scheme

چکیده: هدف اصلی این مقاله حل عددی معادله برگرز غیرخطی یک‌بعدی و دو‌بعدی کوپله با شرایط اولیه و مرزی مناسب با کمک تبدیل کول-هویف و دو روش (LFDM) و (CN-DF) می‌باشد. در واقع با استفاده از تبدیل غیرخطی کول-هویف معادله برگرز یک‌بعدی و دو‌بعدی به معادله انتشار کاهش می‌یابد. سپس با به‌کارگیری روش تفاضل منتهای لگاریتمی (LFDM) معادله انتشار نسبت به مشتق زمان گسسته و در نهایت معادله حاصل با کمک روش (CN-DF) حل می‌شود. در پایان، با مقایسه نتایج عددی حاصل از تغییر عوامل گوناگون از جمله ویسکوزیته و بررسی اندازه خطا، عملکرد مناسب روش عددی و انطباق آن با جواب تحلیلی نمایان می‌شود.

کلمات کلیدی: معادله برگرز، تبدیل کول-هویف، روش تفاضل منتهای لگاریتمی، روش کرانک نیکلسون-دیوفورت و فرانک.

معادله برگرز فرم ساده شده معادله ناویراستوکس^۱ است،
که از جملات فشار و پیوستگی صرف‌نظر شده،

۱ مقدمه

¹ Navier-Stokes equations

بسیاری از پدیده‌های فیزیکی مانند شبیه‌سازی جریان ترافیک، میرایی صوتی در مه^۴، گاز دینامیک و موج ضربه‌ای^۵ مورد توجه بسیاری از محققان قرار گرفته است [۴-۶]. تاکنون برای ارائه راه‌حل‌های دقیق و صریح برای این معادله و تعمیم آن در ابعاد بالاتر، مطالعات فراوانی انجام شده است [۷-۹]. همچنین در سال‌های اخیر تلاش‌های زیادی برای ارائه و بهبود روش‌های تحلیلی و عددی برای حل معادله برگرز صورت گرفته است [۱۰-۱۳]. معادله برگرز با معادله ناویراستوکس از لحاظ غیرخطی بودن، خواص تقارنی، روابط اتلاف انرژی و غیره شباهت دارد، اما از طرفی به دلیل وجود تبدیل کول-هوپف [۱۴ و ۱۵] انتگرال‌پذیر بوده و لذا دارای خاصیت آشوبی نیست. در واقع رمز اصلی حل مسئله برگرز استفاده از تبدیل کول-هوپف یا تعمیم آن به گونه‌ای است که مسئله به یک معادله خطی منجر می‌گردد و به‌طور خودسازگار اثر شرایط مرزی در جواب‌ها وارد می‌شود [۴]. تبدیل کول-هوپف، معادله برگرز غیرخطی اولیه را به یک معادله حرارت خطی و شرایط مرزی دیریکله را به شرایط رایین تبدیل می‌کند، که علاوه بر تسریع روش عددی برای حل معادله برگرز، به حل تحلیلی معادله نیز کمک می‌کند، لذا مورد توجه بسیاری از محققان قرار می‌گیرد [۱۶] که علاوه بر حل معادله برگرز امروزه برای حل بسیاری از معادلات دیگر نیز از این تبدیل یا تعمیم آن بهره‌می‌برند. از آنجا که روش‌های ضمنی پایدار می‌باشند لذا بیشتر برای حل عددی معادلات به کار می‌روند [۱۷]؛ از جمله روش‌های ضمنی، روش تفاضل متناهی لگاریتمی^۶

باقی‌مانده جملات شامل جملات جابجایی و پخشی را معادله برگرز^۱ می‌نامند [۳]. معادله برگرز یک بعدی به فرم زیر می‌باشد:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, a \leq x \leq b, 0 \leq t \leq T \quad (۱)$$

با شرایط اولیه و مرزی زیر

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= u_0(x), \\ u(a, t) &= f_1(x), \\ u(b, t) &= f_2(t). \end{aligned} \quad (۲)$$

ν ضریب ویسکوزیته^۲ که به فرم $\nu = \frac{1}{Re}$ تعریف می‌گردد (Re همان عدد رینولدز می‌باشد) و $u \frac{\partial u}{\partial x}$ جمله غیرخطی جابجایی و $\nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ جمله پخشی^۳ است [۲]. زمانی که $\nu = 0$ معادله برگرز غیرلزج نامیده می‌شود. همچنین معادله برگرز دو‌بعدی کویپله نیز به فرم زیر می‌باشد [۳]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= \nu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}. \end{aligned} \quad (۳)$$

و دارای شرایط اولیه و مرزی زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, t \geq 0, \\ u(x, y, 0) = a_1(x, y), v(x, y, 0) = a_2(x, y), \\ u(x, y, 0) = b_1(x, y), v(x, y, 0) = b_2(x, y). \end{aligned} \quad (۴)$$

جملات $\nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$ ، $\nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)$ که پخش و ν ضریب ویسکوزیته می‌باشد.

در واقع معادله برگرز یک معادله سهموی-هذلولوی است که امروزه به خاطر کاربرد گسترده در

⁴ Acoustic attention in fog

⁵ Shock wave

⁶ Shock wave

¹ Burgers equations

² Kinematic viscosity

³ Diffusion

عددی پیشنهادی حل می‌گردد. مزیت اصلی این روش پایداری نامشروط و همگرایی آن به جواب تحلیلی می‌باشد. نتایج عددی حاصل از این روش در نقاط مختلف نیز نشان‌دهنده کاهش خطا و تطابق جواب‌های عددی و دقیق می‌باشد.

۲ حل عددی معادله برگرز یک‌بُعدی

جی.دی. کول و هویف [۱۴ و ۱۵] در سال (۱۹۵۱) یک تبدیل غیرخطی برای کاهش معادله برگرز به معادله انتشار خطی را مطرح نمودند. تبدیل کول-هویف ابزاری قوی برای حل تحلیلی و عددی معادله برگرز می‌باشد. معمولاً تبدیل کول-هویف به صورت یک قضیه به فرم زیر تعریف می‌گردد [۲۲].

قضیه ۱. اگر $\phi(x, t)$ جواب معادله گرما

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (5)$$

با شرایط اولیه و مرزی رابطه (۲) باشد، آنگاه تبدیل غیرخطی [کول هویف]

$$u(x, t) = -2\nu \frac{\phi_x}{\phi}, \quad (6)$$

یک جواب برای $\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ است، که دارای شرط اولیه

$$\phi(x, 0) = \exp\left(-\frac{1}{2\nu} \int_a^x u(\xi) d\xi\right), \quad (7)$$

$$a \leq x \leq b,$$

و شرایط مرزی

$$\phi_x(1, t) = \phi_x(0, t) = 0, t \geq 0 \quad (8)$$

می‌باشد.

(LFD) است که مزیت اصلی آن پایداری نامشروط می‌باشد. این روش که برای حل معادله برگرز یک‌بُعدی کوپله [۱۸] و دو‌بُعدی کوپله [۱۹] مورد استفاده قرار گرفته است، علاوه بر معادله برگرز برای حل معادلات دیگر از جمله حل معادله kdv برگرز نیز به کار می‌رود [۲۰]. روش کرانک نیکلسون (CN) یک روش تفاضل متناهی ضمنی پایدار می‌باشد و دارای همگرایی مرتبه دوم از گام زمانی و مکانی می‌باشد، که توسط جوهان کرانک و فیلیس نیکلسون مطرح شده است [۲۱]، که برای حل عددی معادله برگرز از آن بهره‌می‌برند [۲۲]. روش دیو فرت (DF) یک روش تفاضل متناهی پایدار نامشروط می‌باشد، که در سال ۱۹۵۳ توسط دیو فرت و فرانکل برای حل عددی معادله گرما به کار رفت [۲۳]. از ترکیب دو روش کرانک-نیکلسون و روش دیو فرت و فرانکل، روش (CN-DF) به دست می‌آید که برای اولین بار در سال ۲۰۰۹ برای حل عددی معادله برگرز مطرح گردید [۲۴ و ۲۵]. برای حل معادله برگرز دو‌بُعدی نیز می‌توان از روش (CN-DF) که روشی پایدار نامشروط می‌باشد، استفاده کرد [۲۶]. در [۲۷] حل عددی معادله برگرز یک‌بُعدی، با تبدیل کول-هویف به همراه روش آدومیان استفاده شده است. به علاوه برای حل عددی معادله برگرز غیرخطی یک‌بُعدی روش کرانک نیکلسون موضعی بهبود یافته^۱ (MLCN) در [۲۸] پیشنهاد گردیده است. با توجه به گستردگی و کاربرد بحث مورد نظر، در مقاله حاضر به حل معادله برگرز غیرخطی یک‌بُعدی و دو‌بُعدی کوپله پرداخته شده است، که به کمک تبدیل غیرخطی کول-هویف گسسته می‌شود و سپس با کمک روش

¹ Shock wave

متناهی لگاریتمی ضمنی^۱، فرض می‌کنیم $A(\phi)$ تابع پیوسته مشتق‌پذیر باشد [۱۸]. آنگاه خواهیم داشت:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = A'(\phi) \left[v \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right], \quad (9)$$

و فرض می‌کنیم $A(\phi) = e^\phi$ آنگاه داریم:

$$\phi^{n+1} = \phi^n + \log_e \left[1 + \Delta t \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)^{n+1} \right].$$

در نهایت با استفاده از روش کرانک نیکلسون-دیوفرت و فرنکل^۲ (CN-DF) خواهیم داشت [۲۶]:

$$\begin{aligned} \phi_i^{n+1} &= \phi_i^n \\ &= \log_e \left[1 + \Delta t \left(\frac{1}{2} \left\{ \frac{\phi_{i+1}^{n+1} - 2\phi_i^{n+1} + \phi_{i-1}^{n+1}}{h^2} \right\} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left\{ \frac{\phi_{i+1}^{n+1} - \phi_i^{n+1} - \phi_i^{n-1} + \phi_{i-1}^n}{h^2} \right\} \right) \right] \end{aligned} \quad (10)$$

دامنه جواب برای معادله انتشار در بازه $(i\Delta x, n\Delta t)$ و

$$\Delta t = \frac{1}{n_x} \quad \text{و} \quad \Delta x = \frac{1}{n_x}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n_x, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

نمایان‌گر افزایش طول گام زمان می‌باشد.

۳ حل عددی معادله برگرز دو بُعدی

در این قسمت به حل عددی معادله برگرز دو بُعدی خواهیم پرداخت، ابتدا قضیه کول-هویف را به فرم زیر تعریف می‌کنیم [۲۹].

قضیه ۲. فرض کنید $\phi(x, y, t)$ جواب معادله گرما

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = v \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right), \quad (11)$$

برهان: فرض کنید $\psi = \psi(x, t)$, $u = \frac{\partial \psi}{\partial x}$ ، لذا $\psi = -2v \log \phi$ پس در معادله (۱) جایگذاری می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_x}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} &= v \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} \\ \Rightarrow \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} \psi_x^2 \right) &= v \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right), \end{aligned}$$

با انتگرال‌گیری نسبت به x داریم:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 = v \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2},$$

داریم $\psi = -2v \log \phi$ لذا

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial t} &= -2v \frac{\phi_t}{\phi}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -2v \frac{\phi_x}{\phi}, \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} &= -2v \frac{\phi_{xx}}{\phi} + 2v \frac{\phi_x^2}{\phi^2}, \end{aligned}$$

باجایگذاری معادلات فوق خواهیم داشت:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

که دارای شرایط اولیه و مرزی زیر می‌باشد

$$\begin{aligned} \phi(x, 0) &= \exp \left(-\frac{1}{2v} \int_a^x u(\xi) d\xi \right), \\ a &\leq x \leq b, \\ \phi_x(0, t) &= \phi_x(b, t) = 0, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

□

قضیه بالا نشان‌دهنده این است که، معادله برگرز (۱) را می‌توان به معادله خطی گرما (۵) با شرایط مرزی و اولیه (۷) و (۸) کاهش داد. حال معادله (۵) را نسبت به متغیر t در بازه $[0, T]$ را به M زیربازه $0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_M = T$ گسسته‌سازی خواهیم کرد که $\Delta t = \frac{T}{M}$ می‌باشد. لذا با کمک روش تفاضل

¹ Implicit logarithmic finite difference method

² Shock wave

$$\begin{aligned} \phi_{i,j}^{n+1} &= \phi_{i,j}^n \\ &= \log_e \left[1 + \frac{1}{2} \Delta t \left(\left\{ \frac{\phi_{i+1,j}^{n+1} - 2\phi_{i,j}^{n+1} + \phi_{i-1,j}^{n+1}}{h^2} \right\} \right. \right. \\ &\quad + \left. \left\{ \frac{\phi_{i+1,j}^{n+1} - \phi_{i,j}^{n+1} - \phi_{i,j}^{n-1} + \phi_{i-1,j}^n}{h^2} \right\} \right. \\ &\quad + \left. \left. \left\{ \frac{\phi_{i,j+1}^{n+1} - 2\phi_{i,j}^{n+1} - \phi_{i,j-1}^{n-1}}{h^2} \right\} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left\{ \frac{\phi_{i,j+1}^{n+1} - \phi_{i,j}^{n+1} - \phi_{i,j}^{n-1} + \phi_{i,j-1}^n}{h^2} \right\} \right) \right] \end{aligned}$$

دامنه جواب برای معادله انتشار در بازه
 $i = 0, 1, 2, \dots, n_x, (i\Delta x, j\Delta y, n\Delta t)$
 و
 $n = 0, 1, 2, \dots$ که $j = 0, 1, 2, \dots, n_y$
 و Δt نشانگر افزایش طول گام
 $\Delta x = \frac{1}{n_x}, \Delta y = \frac{1}{n_y}$
 زمان می باشد.

۴ تشریح مثال های عددی

برای نشان دادن دقت و کارایی روش عددی پیشنهادی
 به ارائه دو مثال که به مقایسه جواب عددی و تحلیلی
 در نقاط گره ای مختلف می باشد، خواهیم پرداخت.

مثال ۱. معادله برگرز یک بُعدی غیرخطی زیر را در نظر
 بگیرید:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

شرایط اولیه و مرزی آن به صورت زیر می باشد:

$$u(x, 0) = \sin(\pi x), 0 \leq x \leq 1,$$

$$u(0, t) = 0 = u(1, t), 0 \leq t \leq T$$

دارای حل تحلیلی زیر است [۲۲]:

با شرایط اولیه و مرزی رابطه (۲) باشد، آنگاه تبدیل
 غیرخطی [کول هوپف]،

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= -2v \frac{\phi_x}{\phi}, \\ v(x, y, t) &= -2v \frac{\phi_y}{\phi}, \end{aligned} \quad (12)$$

یک جواب برای

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= v \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + v \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, \end{aligned}$$

و دارای شرایط اولیه و مرزی زیر می باشد:

$$\begin{aligned} u(x, y, 0) &= a_1(x, y), v(x, y, 0) = a_2(x, y), \\ u(x, y, 0) &= b_1(x, y), v(x, y, 0) = b_2(x, y), \end{aligned}$$

برهان. به مرجع [۳۰] مراجعه شود. □

حال معادله (۱۱) را نسبت به متغیر t در بازه
 $0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_M = T$ زیر بازه M
 گسسته سازی خواهیم کرد که $\Delta t = \frac{T}{M}$ می باشد. فرض
 کنیم $B(\Phi)$ تابع پیوسته مشتق پذیر باشند. آنگاه
 معادله (۱۱) را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{\partial B}{\partial t} = B'(\phi) v \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right).$$

فرض می کنیم $B(\phi) = e^\phi$ آنگاه داریم [۱۹]:

$$\phi_{i,j}^{n+1} = \phi_{i,j}^n = \log_e \left[1 + \Delta t \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)_{i,j}^{n+1} \right].$$

حال با استفاده از روش کرانک نیکلسون- دیوفرت و
 فرنکل (CN-DF) می توان معادله پخش خطی را به
 فرم زیر تبدیل کنیم [۲۶]:

$$C_n = 2 \int_0^1 \left\{ -\frac{1}{2\pi v} [1 - \cos(\pi x)] \cos(n\pi x) \right\} dx.$$

در ادامه، با ارائه جداولی جواب تحلیلی و عددی به دست آمده در نقاط گره‌ای مختلف و مقادیر ویسکوزیته سینماتیک متفاوت بررسی شده است.

$$u(x, t)$$

$$= 2\pi v \frac{\sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp(-n^2 \pi^2 v t) n \sin(n\pi x)}{C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp(-n^2 \pi^2 v t) n \cos(n\pi x)},$$

که در آن ضرایب C_0, C_n به فرم زیر تعریف می‌گردد:

$$C_0 = \int_0^1 \left\{ -\frac{1}{2\pi v} [1 - \cos(\pi x)] \right\} dx,$$

جدول ۱. جواب عددی و تحلیلی در $\Delta t = 0.001, v = 1, T = 0.5$

X	جواب عددی				جواب تحلیلی
	$N = 20$	$N = 40$	$N = 80$	$N = 100$	
۰.۱	$2.220E-03$	$2.214E-03$	$2.213E-03$	$2.213E-03$	$2.213E-03$
۰.۲	$4.232E-03$	$4.215E-03$	$4.211E-03$	$4.209E-03$	$4.210E-03$
۰.۳	$5.827E-03$	$5.802E-03$	$5.794E-03$	$5.795E-03$	$5.796E-03$
۰.۴	$6.851E-03$	$6.823E-03$	$6.816E-03$	$6.815E-03$	$6.816E-03$
۰.۵	$7.208E-03$	$7.178E-03$	$7.169E-03$	$7.167E-03$	$7.169E-03$
۰.۶	$6.859E-03$	$6.828E-03$	$6.821E-03$	$6.820E-03$	$6.821E-03$
۰.۷	$5.873E-03$	$5.811E-03$	$5.803E-03$	$5.803E-03$	$5.804E-03$
۰.۸	$4.241E-03$	$4.222E-03$	$4.218E-03$	$4.217E-03$	$4.218E-03$
۰.۹	$2.228E-03$	$2.220E-03$	$2.218E-03$	$2.218E-03$	$2.218E-03$

توافق خوبی دارد. لذا با افزایش تعداد نقاط گره‌ای از ۲۰ به ۱۰۰ این نتایج بهتر شده و به بیان دیگر، نتایج حاصل از روش ارائه شده خطای کمتری با جواب تحلیلی دارند.

در جدول ۴ نیز نتایج عددی و تحلیلی در نقاط مختلف از مکان و زمان $\Delta x = 0.01, v = 0.1, \Delta t = 0.001$ ارائه شده است، که نشان دهنده توافق خوب این نتایج با جواب تحلیلی می‌باشد؛ لذا با توجه به جداول قبلی و جدول ۴ روش عددی ارائه شده نتایج دقیقی را ارائه می‌دهد.

نتایج ارائه شده در جدول ۱ نشانگر این است که در زمان $\Delta t = 0.001, T = 0.5$ با ضریب ویسکوزیته $v = 1$ با افزایش تعداد نقاط گره‌ای جواب تحلیلی به جواب عددی نزدیک بوده، لذا خطای نتایج به دست آمده با روش ارائه شده بسیار ناچیز بوده و تقریباً تطابق کامل بین جواب عددی و تحلیلی وجود دارد.

با توجه به نتایج ارائه شده جدول ۲ که با $\Delta t = 0.001, v = 1, T = 0.1$ و جدول ۳ که با $\Delta t = 0.001, v = 1, T = 0.6$ می‌باشد، واضح است که جواب عددی در نقاط گره‌ای مختلف با جواب تحلیلی

جدول ۲. جواب عددی و تحلیلی در $\Delta t = 0.0001, \nu = 1, T = 0.1$

X	جواب عددی				جواب تحلیلی
	$N=20$	$N=40$	$N=80$	$N=100$	
0.1	$1.623E-05$	$1.603E-05$	$1.598E-05$	$1.598E-05$	$1.598E-05$
0.2	$3.087E-05$	$3.050E-05$	$3.041E-05$	$3.039E-05$	$3.040E-05$
0.3	$4.249E-05$	$4.198E-05$	$4.185E-05$	$4.183E-05$	$4.184E-05$
0.4	$4.995E-05$	$4.935E-05$	$4.920E-05$	$4.918E-05$	$4.919E-05$
0.5	$5.252E-05$	$5.189E-05$	$5.173E-05$	$5.171E-05$	$5.172E-05$
0.6	$4.995E-05$	$4.935E-05$	$4.920E-05$	$4.918E-05$	$4.919E-05$
0.7	$4.249E-05$	$4.198E-05$	$4.185E-05$	$4.183E-05$	$4.184E-05$
0.8	$3.087E-05$	$3.050E-05$	$3.041E-05$	$3.039E-05$	$3.040E-05$
0.9	$1.623E-05$	$1.603E-05$	$1.598E-05$	$1.598E-05$	$1.598E-05$

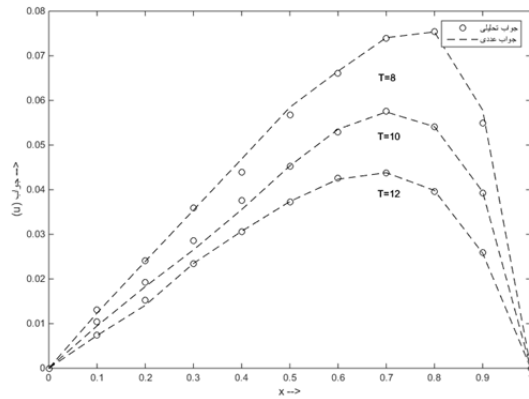
جدول ۳. جواب عددی و تحلیلی در $\Delta t = 0.0001, \nu = 1, T = 0.6$

X	جواب عددی				جواب تحلیلی
	$N=20$	$N=40$	$N=80$	$N=100$	
0.1	$2.253E-02$	$2.253E-02$	$2.253E-02$	$2.253E-02$	$2.214E-02$
0.2	$4.357E-02$	$4.357E-02$	$4.357E-02$	$4.357E-02$	$4.280E-02$
0.3	$6.156E-02$	$6.155E-02$	$6.155E-02$	$6.155E-02$	$6.043E-02$
0.4	$7.487E-02$	$7.485E-02$	$7.485E-02$	$7.485E-02$	$7.344E-02$
0.5	$8.186E-02$	$8.183E-02$	$8.182E-02$	$8.182E-02$	$8.023E-02$
0.6	$8.109E-02$	$8.105E-02$	$8.104E-02$	$8.104E-02$	$7.940E-02$
0.7	$7.167E-02$	$7.162E-02$	$7.161E-02$	$7.161E-02$	$7.011E-02$
0.8	$5.373E-02$	$5.369E-02$	$5.368E-02$	$5.368E-02$	$5.252E-02$
0.9	$5.373E-02$	$5.369E-02$	$5.368E-02$	$5.368E-02$	$5.252E-02$

جدول ۴. جواب عددی و تحلیلی در $\Delta t = 0.0001, \nu = 0.1, \Delta x = 0.01$

X	T	جواب عددی	جواب تحلیلی
0.25	2.4	$4.755E-02$	$4.755E-02$
	2.6	$3.955E-02$	$3.955E-02$
	3.0	$2.720E-02$	$2.720E-02$
0.50	2.4	$7.268E-02$	$7.269E-02$
	2.6	$5.966E-02$	$5.967E-02$
	3.0	$4.020E-02$	$4.020E-02$
0.75	2.4	$5.593E-02$	$5.593E-02$
	2.6	$4.520E-02$	$4.521E-02$
	3.0	$2.977E-02$	$2.977E-02$

تحلیلی و عددی برای $v=0.005$ در سه زمان مختلف برای $T=8, T=10, T=12$ نشان داده شده است.



شکل ۲. جواب عددی و تحلیلی در $v=0.005, \Delta t=0.001$

$$\|u^\alpha - u\|_r = \left(h \sum_{i=1}^N (u_{i,n} - u(x_i, T))^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\|u^\alpha - u\|_\infty = \text{Max}_{1 \leq i \leq N} |u_{i,M} - u(x_i, T)|,$$

که u^α تقریبی از جواب u و جواب تحلیلی و $u_{i,M} = u(x_i, T_M)$ جواب تقریبی در $x=x_i, t_M=T$ و $u(x_i, T)$ جواب تحلیلی در $x=x_i$ و زمان پایانی T می‌باشد. جدول زیر محاسبه خطا برای مقادیر مختلف از $\Delta t, T, v$ می‌باشد.

جدول ۵. محاسبه خطا روی نرم L_r و L_∞ برای مقادیر مختلف از T و $N=80$.

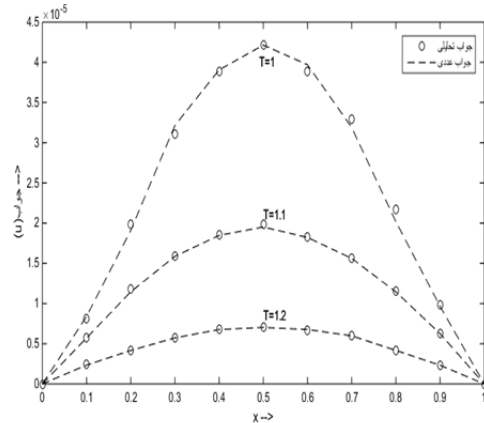
$\Delta t = 0.001, v = 1$	$T=2$		$T=1$	
	L_r	L_∞	L_r	L_∞
جواب	$9.7552E-13$	$6.9285E-13$	$6.8127E-09$	$4.8173E-09$
$\Delta t = 0.01, v = 0.1$	$T=3$		$T=3.5$	
	L_r	L_∞	L_r	L_∞
جواب	$1.5263E-06$	$2.1892E-06$	$7.0422E-07$	$1.0085E-06$

خواهیم نمود. معادله دو بُعدی زیر را در نظر بگیرید:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = v \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + v \frac{\partial^2 v}{\partial y^2},$$

در شکل ۱ نتایج عددی و تحلیلی معادله برگرز یک بُعدی در $v=1$ در سه زمان مختلف برای $T=1, T=1.1, T=1.2$ و شکل ۲ جواب



شکل ۱. جواب عددی و تحلیلی در $v=1, \Delta t=0.0001$

نتایج نشان می‌دهد که با تغییر مقدار زمان، جواب به دست آمده نیز متفاوت خواهد بود و با دقت به شکل‌ها می‌بایم که نتایج عددی با نتایج تحلیلی در همان نقاط گره‌ای نزدیک بوده و در بعضی نقاط تقریباً جواب‌ها مطابق جواب‌های تحلیلی می‌باشند، لذا این خطوط روی هم منطبق می‌گردند. دقت در روش عددی با استفاده از نرم L_r و L_∞ تعیین می‌گردد، لذا داریم:

مثال ۲. در این مثال به حل عددی معادله دو بُعدی برگرز با روش پیشنهادی می‌پردازیم و جواب تحلیلی حاصل از تبدیل کول-هویف را با جواب عددی مقایسه

$$v(x, y, t) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} (1 + \exp(\frac{-4x + 4y - t}{32v}))^{-1},$$

در جدول‌های ۶ و ۷ که برای گام زمانی در جدول‌های ۶ و ۷ که برای گام زمانی $T = 0.5, 0.05; \Delta t = 0.005$ دیده می‌شود که هر چه عدد رینولدز بیشتر باشد دقت روش بالا می‌رود و در همین جدول‌ها برای گام زمانی مختلف مسئله را بررسی کرده‌ایم که دیده می‌شود در گام زمانی کوچک‌تر دقت روش بالا می‌رود.

و دارای شرایط اولیه زیر می‌باشد (شرایط مرزی نیز با معادله بالا و با تغییر زمان t مشخص شده است):

$$u(x, y, 0) = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} (1 + \exp(\frac{-x + y}{8v}))^{-1},$$

$$v(x, y, 0) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} (1 + \exp(\frac{-x + y}{8v}))^{-1},$$

حل تحلیلی معادله فوق نیز به صورت زیر می‌باشد [۳۱]:

$$u(x, y, t) = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} (1 + \exp(\frac{-4x + 4y - t}{32v}))^{-1},$$

جدول ۶. مقایسه و محاسبه جواب عددی $u(x, y, t)$ با جواب تحلیلی در نقاط گره‌ای مختلف در $v = 0.01; T = 0.05; \Delta t = 0.005$

نقاط گره‌ای	$T = 0.05$		$T = 0.5$	
	حل عددی	حل تحلیلی	حل عددی	حل تحلیلی
(0.1, 0.1)	0.6179	0.6172	0.5555	0.5557
(0.1, 0.3)	0.7155	0.7168	0.6696	0.6698
(0.1, 0.5)	0.7454	0.7449	0.7348	0.7350
(0.2, 0.7)	0.7475	0.7481	0.7443	0.7443
(0.9, 0.2)	0.5122	0.5002	0.5000	0.5001
(0.3, 0.8)	0.7481	0.7481	0.7442	0.7443
(0.7, 0.4)	0.5114	0.5104	0.5034	0.5035
(0.5, 0.9)	0.7449	0.7449	0.7348	0.7350
(0.6, 0.1)	0.5025	0.5104	0.5003	0.5005
(0.7, 0.3)	0.5037	0.5040	0.5012	0.5013
(0.4, 0.7)	0.7349	0.7366	0.7128	0.7130
(0.6, 0.8)	0.7167	0.7168	0.6696	0.6698
(0.1, 0.9)	0.7489	0.7499	0.7497	0.7497
(0.9, 0.9)	0.6181	0.6172	0.5555	0.5557

جدول ۷. مقایسه و محاسبه جواب عددی $v(x, y, t)$ با جواب تحلیلی در نقاط گره‌ای مختلف در $v = 0.01; T = 0.05; \Delta t = 0.005$

نقاط گره‌ای	$T = 0.05$		$T = 0.5$	
	حل عددی	حل تحلیلی	حل عددی	حل تحلیلی
(0.1, 0.1)	0.8828	0.8828	0.9438	0.9443
(0.1, 0.3)	0.7822	0.7832	0.8298	0.8302
(0.1, 0.5)	0.7540	0.7551	0.7649	0.7650
(0.2, 0.7)	0.7529	0.7519	0.7498	0.7557
(0.9, 0.2)	0.9997	0.9998	0.9987	0.9999
(0.3, 0.8)	0.7518	0.7519	0.7780	0.7557
(0.7, 0.4)	0.9896	0.9895	0.9964	0.9965
(0.5, 0.9)	0.7489	0.7551	0.7642	0.7650
(0.6, 0.1)	0.9989	0.9985	0.9985	0.9995
(0.7, 0.3)	0.9949	0.9960	0.9975	0.9987
(0.4, 0.7)	0.7635	0.7634	0.7872	0.7870
(0.6, 0.8)	0.7844	0.7832	0.8308	0.8302
(0.1, 0.9)	0.7520	0.7501	0.7512	0.7503
(0.9, 0.9)	0.8698	0.8828	0.9438	0.9443

از جواب عددی ارائه داده شده در جداول، دیده می‌شود که دقت روش بالا می‌باشد.

جدول ۸. مقایسه و محاسبه جواب عددی $u(x, y, t)$ با جواب تحلیلی در نقاط گره‌ای مختلف در $v=1$ ، $\Delta t = 0.005$

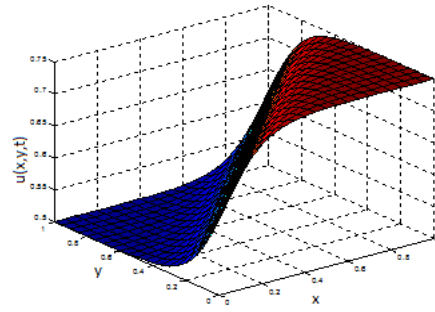
نقاط گره‌ای	$T = 0.05$		$T = 0.5$	
	حل عددی	حل تحلیلی	حل عددی	حل تحلیلی
(۰.۱, ۰.۱)	۰.۶۲۳۷	۰.۶۲۴۹	۰.۶۲۳۷	۰.۶۲۴۰
(۰.۱, ۰.۳)	۰.۶۳۶۰	۰.۶۳۶۵	۰.۶۲۴۳	۰.۶۲۵۶
(۰.۱, ۰.۵)	۰.۶۱۲۰	۰.۶۲۸۰	۰.۶۲۰۱	۰.۶۲۷۱
(۰.۲, ۰.۷)	۰.۶۱۸۵	۰.۶۲۸۸	۰.۶۱۸۰	۰.۶۲۷۹
(۰.۹, ۰.۲)	۰.۶۲۰۱	۰.۶۱۹۴	۰.۶۱۸۷	۰.۶۱۸۶
(۰.۳, ۰.۸)	۰.۶۲۸۸	۰.۶۲۸۸	۰.۶۲۷۳	۰.۶۲۷۹
(۰.۷, ۰.۴)	۰.۶۲۲۴	۰.۶۲۲۶	۰.۶۲۱۵	۰.۶۲۱۷
(۰.۵, ۰.۹)	۰.۶۲۷۴	۰.۶۲۸۰	۰.۶۲۶۹	۰.۶۲۷۱
(۰.۶, ۰.۱)	۰.۶۲۲۰	۰.۶۲۱۰	۰.۶۲۰۰	۰.۶۲۰۱
(۰.۷, ۰.۳)	۰.۶۲۲۰	۰.۶۲۱۸	۰.۶۲۱۱	۰.۶۲۰۱
(۰.۴, ۰.۷)	۰.۶۲۷۱	۰.۶۲۷۲	۰.۶۲۶۴	۰.۶۲۰۹
(۰.۶, ۰.۸)	۰.۶۲۶۵	۰.۶۲۶۵	۰.۶۲۲۰	۰.۶۲۶۴
(۰.۱, ۰.۹)	۰.۶۲۹۸	۰.۶۳۱۱	۰.۶۲۹۰	۰.۶۲۵۶
(۰.۹, ۰.۹)	۰.۶۲۳۹	۰.۶۲۴۹	۰.۶۲۳۶	۰.۵۵۵۷

جدول ۹. مقایسه و محاسبه جواب عددی $v(x, y, t)$ با جواب تحلیلی در نقاط گره‌ای مختلف در $v=1$ ، $\Delta t = 0.005$

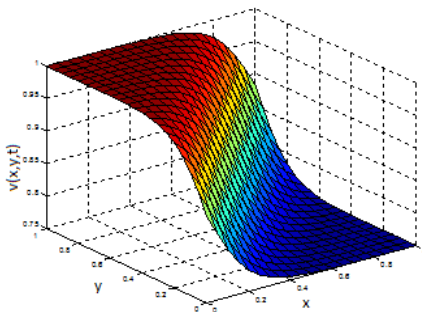
نقاط شبکه	$t = 0.05$		$t = 0.5$	
	حل عددی	حل تحلیلی	حل عددی	حل تحلیلی
(۰.۱, ۰.۱)	۰.۸۵۷۷	۰.۸۷۴۷	۰.۸۷۴۹	۰.۸۷۶۰
(۰.۱, ۰.۳)	۰.۸۲۸۵	۰.۸۷۴۵	۰.۸۷۲۰	۰.۸۷۴۴
(۰.۱, ۰.۵)	۰.۸۵۱۶	۰.۸۷۱۶	۰.۸۷۱۷	۰.۸۷۲۹
(۰.۲, ۰.۷)	۰.۸۷۴۸	۰.۸۶۵۸	۰.۸۷۲۰	۰.۸۷۲۱
(۰.۹, ۰.۲)	۰.۸۸۸۰	۰.۸۸۱۰	۰.۸۸۰۸	۰.۸۸۱۴
(۰.۳, ۰.۸)	۰.۸۷۳۵	۰.۸۷۱۵	۰.۸۷۱۵	۰.۸۷۲۱
(۰.۷, ۰.۴)	۰.۸۷۴۰	۰.۸۷۵۰	۰.۸۷۳۹	۰.۸۷۸۳
(۰.۵, ۰.۹)	۰.۸۷۴۴	۰.۸۷۰۴	۰.۸۷۲۵	۰.۸۷۲۹
(۰.۶, ۰.۱)	۰.۸۷۸۰	۰.۸۷۳۰	۰.۸۷۸۵	۰.۸۷۹۹
(۰.۷, ۰.۳)	۰.۸۶۸۰	۰.۸۷۵۰	۰.۸۷۸۶	۰.۸۷۹۱
(۰.۴, ۰.۷)	۰.۸۸۴۱	۰.۸۷۱۱	۰.۸۷۴۵	۰.۸۷۳۶
(۰.۶, ۰.۸)	۰.۸۸۷۲	۰.۸۷۰۲	۰.۸۵۸۰	۰.۸۷۴۴
(۰.۱, ۰.۹)	۰.۸۶۷۱	۰.۸۶۹۱	۰.۸۶۹۹	۰.۸۶۹۷
(۰.۹, ۰.۹)	۰.۸۷۶۶	۰.۸۷۴۶	۰.۸۷۵۵	۰.۵۷۶۰

در جدول‌های مربوط به جواب‌های به‌دست‌آمده دیده می‌شود که روش ارائه شده بهتر عمل می‌کند، لذا جواب بسیار نزدیکی به جواب تحلیلی به‌دست می‌آورد.

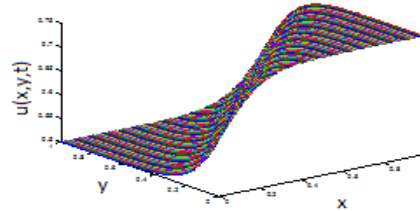
شکل‌های ۳ و ۴ تقریبی از روش عددی و شکل‌های ۵ و ۶ نیز جواب تحلیلی برای $u(x, y, t), v(x, y, t)$ در گام زمانی $T = 0.05$ نشان می‌دهد.



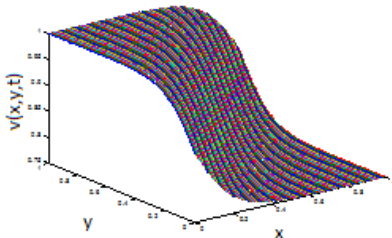
شکل ۳. جواب عددی $u(x, y, t)$ در $\Delta t = 0.01; T = 0.05; v = 0.01$



شکل ۴. جواب عددی $v(x, y, t)$ در $\Delta t = 0.01; T = 0.05; v = 0.01$



شکل ۵. جواب تحلیلی $u(x, y, t)$ در $\Delta t = 0.01; T = 0.05; v = 0.01$



شکل ۶. جواب تحلیلی $v(x, y, t)$ در $\Delta t = 0.01; T = 0.05; v = 0.01$

برای به‌دست آوردن خطای روش عددی نیز نرم خطا به فرم زیر تعریف می‌گردد، که با استفاده از آن به محاسبه میزان خطای نتایج عددی با جواب تحلیلی می‌پردازیم.

در جدول ۱۰ به محاسبه خطا در گام زمانی و عدد ویسکوزیته مختلف پرداخته شده است. با توجه به جدول فوق و جداول قبلی و شکل‌های ارائه شده برای هر دو مثال، به این موضوع می‌توان پی برد که روش ارائه شده روشی کارآمد بوده که نتایج حاصل از آن به جواب تحلیلی نزدیک می‌باشد.

$$E := \left(\frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n (|u_{i,j}^{exact} - u_{i,j}^{computed}|)^2}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n (|u_{i,j}^{exact}|)^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

غیرخطی یک‌بعدی و دو‌بعدی در شرایط مختلف مورد بررسی قرار گرفت. با روش تفاضل متناهی لگاریتمی مشتق زمان معادله انتشار به‌دست آمده از تبدیل غیرخطی را گسسته نموده و برای مشتق دوم مکان از روش کرانک نیکلسون دیو فورت و فرانکل استفاده نمودیم. نتایج حاصل از روش عددی مطرح شده برای مثال‌های ارائه شده، با تغییر گام مکانی، زمانی و عدد ویسکوزیته، نشان‌دهنده نزدیکی جواب‌های به‌دست آمده به جواب دقیق می‌باشد. مقایسه مقادیر به‌دست آمده از حل عددی در جداول، نمودارها و بررسی اندازه خطا با جواب تحلیلی کارآمد بودن روش ارائه شده را بیان می‌کند.

جدول ۱۰. محاسبه خطا برای مقادیر مختلف از $\Delta t, \nu$

$\nu = 0.1, T = 1.0$		
Δt	u-component error	v-component error
0.01	$8.452E-004$	$4.992E-004$
0.001	$2.190E-004$	$1.582E-004$
0.0001	$9.146E-006$	$6.199E-006$
$\Delta t = 0.01, T = 1.0$		
ν	u-component error	v-component error
0.1	$8.452E-004$	$4.992E-004$
0.01	$3.270E-003$	$2.421E-003$
0.005	$1.365E-003$	$9.126E-003$

۵ نتیجه‌گیری

در این مقاله نتایج حاصل از حل عددی معادله برگرز

References

- [1] A.C. Eringen, Theory of micro fluids, J. Appl. Math. Mech., (1966) 1-18.
- [2] H. Bateman, Some recent research on the motion of fluids, Monthly Weather Review, 43 (1915) 163-170.
- [3] S.E. Esipov, Coupled Burgers' equations: a model of poly-dispersive sedimentation, Physical Rev. E, 52 (1995) 3711-3718.
- [4] N. Su, P.C. Watt, K.W. Vincent, M. E. Close, R. Mao, Analysis of turbulent flow patterns of soil water under field conditions using Burgers' equation and porous suction-cup samplers, Aust. J. Soil Res., 42 (2004) 9-16.
- [5] N.J. Zabusky, M.D. Kruskal, Interaction of solitons in a collision less plasma and the recurrence of initial states, Physical Rev. J. Archive, 15 (1996) 274-243.
- [6] P.F. Zhao, M.Z. Qin, Multi geometry and multisymplectic preissmann scheme for the KdV equation, J. Phys. A, 33 (2000) 3613-3626.
- [7] M.C. Kweyu, W.A. Manyonge, A. Koross, V. Semaganda, Numerical Solutions of the Burgers System in Two-Dimensions under Varied Initial and Boundary Conditions, Appl. Math. Sci., 6 (2012) 5603-5615.
- [8] A.A. Soliman, The modified extended tanh-function method for solving Burgers-type equations, J. Phys. A, 361 (2006): 394.
- [9] G.W. Wei, Y. Gu, Conjugate filter approach for solving Burgers' equation, Appl. Math. Comput., 149 (2002) 439.
- [10] N. Bressan, A. Quarteroni, An implicit/explicit spectra method for Burgers' equation, Calcolo, 23 (1986) 265-284.
- [11] T. Özis, A. Esen, S. Kutlay, Numerical solution of Burgers equation by B-Spline finite elements, Appl. Math. Comput., 165 (2005) 237-249.
- [12] T. Özis, E.N. Aksan, A.Ozdes, A finite element for solution of Burgers equation, Appl. Math. Comput., 139 (2003) 417-428.

- [13] K. Pandey, L. Verma, A.K. Verma, On a finite difference scheme for Burgers equation, *Appl. Math. Comput.*, 215 (2009) 2206-2214.
- [14] J.D. Cole, On a quasilinear parabolic equation occurring in aerodynamics, *Appl. Math. Comput.*, 9 (1972) 225-236.
- [15] E. Hopf, The partial differential equation $u_t + uu_x = u_{xx}$, *Commun. Pure Appl. Math. J.*, 3 (1950) 201-230.
- [16] K.T. Joseph, A.S. Vasudeva Murthy, Hopf-Cole transformation to some systems of partial differential equations, *Nonlinear Differ. Eq. Appl. NoDEA*, 8 (2001) 173-193.
- [17] V.K. Srivastava, S. Singh, M.K. Awasthi, Numerical solution of coupled Burgers' equation by an implicit finite difference scheme, *AIP Advances*, 3 (2013): 082131.
- [18] V.K. Srivastava, M. Tamsir, M.K. Awasthi, S. Singh, One-dimensional coupled Burgers' equation and its numerical solution by an implicit logarithmic finite-difference method, *AIP Advances*, 4 (2014): 037119.
- [19] V.K. Srivastava, M.K. Awasthi, S. Singh, An implicit logarithmic finite-difference technique for two dimensional coupled viscous Burgers' equation, *AIP Advances*, 3 (2013) 122105-122109.
- [20] S.A. El Morsy, M.S. El-Azab, Logarithmic finite difference method applied to KdVB equation, *Amer. Acad. & Scholarly Res. J.*, 4 (2012): 2.
- [21] J. Crank, P. Nicolson, A practical method for numerical evaluation of partial differential equation of the heat conduction type, *Math. Proc. Cambridge Philosophical Soc.*, 1 (1947) 50-67.
- [22] M.K. Kadalbajoo, A. Awasthi, A numerical method based on Crank-Nicolson scheme for Burgers' equation, *Appl. Math. Comput.*, 182 (2006) 1430-1442.
- [23] E.C. Du Fort, S.P. Frankel, Stability conditions in the numerical treatment of parabolic differential equation, *Mathematical table and other aids to computation*, 7 (1953) 135-152.
- [24] K. Alfred, O.M.E. Okoya, O. Ongati, Hybrid finite difference schemes from operator splitting for solving Burgers equation, *J. Agriculture, Pure Appl. Sci. Tech.*, 1 (2009) 45-52.
- [25] K. Pandey, V. Lajja, K.V. Amit, Du Fort-Frankel finite difference scheme for Burgers equation, *Arab j. Math.*, 2 (2012) 91-101.
- [26] K. Cleophas, N. Benjamin, W. John, Hybrid Crank- Nicolson-Du Fort and Frankel (CN-DF) scheme for the numerical solution of the 2-D coupled Burgers system, *Appl. Math. Sci.*, 8 (2014) 2353-2361.
- [27] A.R. Haghghi, M. Shojaeifard, Numerical solution of the one dimensional non-linear Burgers equation using the Adomian decomposition method and the comparison between the modified Local Crank-Nicolson method and the VIM exact solution, *Int. J. Indust. Math.*, 2 (2015) 149-159.
- [28] A.R. Haghghi, S. Pakrou, A comparison of the LBM with the modified local Crank- Nicolson method solution of transient one-dimensional non-linear Burgers equation, *Int. J. Comput. Sci. Math.*, 7 (2016) 459-466.
- [29] C.A.J. Fletcher, Generating exact solutions of the two-dimensional Burgers' equation, *Int. J. Modern Math. Sci.*, 5 (2013) 1-13.
- [30] T. Özis, Y. Aslan, The semi-approximate approach for solving Burgers' equation with high Reynolds number, *Appl. Math. Comput.*, 163 (2005) 131-145.
- [31] V.K. Srivastava, M.T. Ashutosh, Generating exact solution of three dimensional coupled unsteady nonlinear generalized viscous Burgers' equations, *Int. J. Modern Math. Sci.*, 5 (2013) 1-13.