Complex and Nonlinear Systems
Vol. 1, No. 2, Winter 2018, pp. 89-93

سیستم‌های مختلط و غیرخطی
سال ۱، دوره ۱، شماره ۲، زمستان ۱۳۹۶، صص ۸۹ تا ۹۳

# یک مشخصه از ۴–همریختی‌های جردن

عباس زیوری کاظم‌پور*

استادیار، گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه آیت الله بروجردی

تاریخ دریافت: ۱۳۹۶/۰۶/۳۱ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۶/۱۰/۱۸

# A characterization of 4-Jordan homomorphisms

Abbas Zivari-Kazempour

Assistant Professor, Department of Mathematics, Faculty of Sciences,
University of Ayatollah Borujerdi

Received: 9/22/2017 Accepted: 1/8/2018

**چکیده:** فرض کنید $n \in \{2,3,4\}$ ثابت باشد. در این مقاله تحت شرایط خاص ثابت می‌کنیم که هر $n-$همریختی جردن از جبر باناخ یکدار $A$ به توی یک جبر باناخ جابجایی $B$ یک $n-$همریختی است.

**کلمات کلیدی:** $n-$همریختی، $n-$همریختی جردن، جبر باناخ جابجایی.

**Abstract:** Let $n \in \{2,3,4\}$ be fixed. In this paper under special hypotheses we prove that each n-Jordan Homomorphism from unital Banach algebra A into a commutative Banach algebra B is an n-Homomorphism.

**Keywords:** n-Homomorphism, n-Jordan Homomorphism, Commutative Banach algebra.

## ۱ مقدمه

فرض کنید $A$ و $B$ جبرهای باناخ مختلط، $n \geq 2$ یک عدد صحیح و $f: A \to B$ یک تابع خطی باشد. در این صورت $f$ یک $n-$همریختی نامیده می‌شود اگر برای هر $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$،

$$f(a_1 a_2 \dots a_n) = f(a_1) f(a_2) \dots f(a_n).$$

به طور عام یک ۳–همریختی فقط یک همریختی نامیده می‌شود. واضح است که هر همریختی برای $n \geq 2$ یک $n-$همریختی می‌باشد، ولی در حالت کلی عکس این مطب نادرست است. مفهوم $n-$همریختی‌ها برای جبرها روی میدان اعداد مختلط توسط حجازیان[1] و همکارانش در منبع [۱] مورد مطالعه قرار گرفت. برخی از خواص ۳–همریختی‌ها در منبع [۲] به دست آمده است.

در [۳] اسحاقی گرجی[2] مفهوم $n-$همریختی‌های جردن را معرفی کرد. یک تابع خطی $f$ بین جبرهای باناخ $A$ و $B$ یک $n-$همریختی جردن نامیده می‌شود اگر برای هر $a \in A$،

[1] Hejazian
[2] Eshaghi Gordji

*Corresponding author: zivari6526@gmail.com

*نویسنده مسئول

$$f(a^n)=f(a)^n.$$

یک ۲-همریختی جردن به‌طور ساده یک همریختی جردن نامیده می‌شود. قابل ذکر است که اگر $n=2$ باشد، آنگاه برای هر $a\in A$، $f(a^2)=f(a)^2$. لذا با تعویض $a$ با $a+b$ نتیجه می‌شود که برای هر $a,b\in A$،

$$f(ab+ba)=f(a)f(b)+f(b)f(a). \quad (1)$$

به عبارت دیگر $f$ یک همریختی جردن است اگروتنهااگر رابطه (۱) برقرار باشد [۴]. واضح است که هر $n$–همریختی یک $n$–همریختی جردن می‌باشد، ولی در حالت کلی عکس این مطب نادرست است. به عنوان مثال برای حالت‌های $n\in\{2,3,4\}$ نشان داده شده که هر $n$–همریختی جردن بین جبرهای باناخ جابجایی $A$ و $B$ یک $n$–همریختی است [۳]. همچنین این نتیجه برای هر عدد طبیعی گسترش داده شد [۵].

زلاسکو[1] یک مشخصه از همریختی‌های جردن را در منبع [۶] بیان نموده که در زیر به آن اشاره می‌کنیم. برای رویکرد دیگری از این نتیجه به مرجع [۷] مراجعه کنید.

**قضیه ۱.** فرض کنید $A$ یک جبر باناخ باشد که لزوماً جابجایی نیست و فرض کنید $B$ یک جبر باناخ نیم‌ساده و جابجایی باشد. در این صورت هر همریختی جردن $f:A\to B$ یک همریختی است.

نتایج متعددی در مورد ۳-همریختی جردن روی جبرهای باناخ و $C^*$-جبرها توسط نویسنده در [۸] به‌دست آمده است. در این مقاله برای $n\in\{2,3,4\}$، نشان می‌دهیم که اگر برای هر $a,b,x,y\in A$،

$$f(axby-aybx)=0,$$

آنگاه هر $n$–همریختی جردن $f$ از جبر باناخ یکدار $A$ به جبر باناخ جابجایی $B$ یک $n$–همریختی است.

## ۲ یک تجزیه از ۴-همریختی‌های جردن

**لم ۱.** فرض کنید $n\in\{2,3,4\}$ ثابت و $A$ یک جبر باناخ یکدار با واحد $e$ باشد. اگر $f:A\to B$ یک $n$–همریختی جردن ناصفر باشد، آنگاه $f(e)\neq 0$.

برهان. حالت $n=2$ ساده است. حالت $n=3$ لم ۲.۲ از منبع [۸] می‌باشد. لذا فرض کنید $n=4$ باشد و $f:A\to B$ یک ۴-همریختی جردن ناصفر باشد. بنابراین برای هر $a\in A$، $f(a^4)=f(a)^4$.

با جایگذاری $x+y$ بجای $a$، رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$I+J=6f(x)^2f(y)^2+4f(x)^3f(y)+4f(x)f(y)^3, \quad (2)$$

که در آن

$$I=f(x^2y^2+y^2x^2+xyxy+xy^2x+yxyx+yx^2y),$$

و

$$J=f(x^3y+x^2yx+y^2xy+y^3x+xyx^2+y^3+yx^3+yxy^2).$$

با جایگذاری $-y$ بجای $y$ در رابطه (۲) به‌دست می‌آوریم:

$$I-J=6f(x)^2f(y)^2-4f(x)^3f(y)-4f(x)f(y)^3. \quad (3)$$

بنابر روابط (۲) و (۳)، برای هر $x,y\in A$،

$$I=6f(x)^2f(y)^2. \quad (4)$$

---
[1] Zelazko

اکنون فرض کنید که $f(e)=۰$ باشد، در این صورت با جایگذاری $e$ بجای $y$ در رابطه (۴) نتیجه می‌شود که برای هر $x \in A$،

$$۶f(x^{۲})=۰. \qquad (۵)$$

با جایگذاری $x+e$ بجای $x$ در رابطه (۵) نتیجه می‌شود که $f(x^{۲}+۲x+e)=۰$. بنابراین برای هر $x \in A$، $f(x)=۰$، که این با فرض ناصفر بودن $f$ در تناقض است. لذا فرض خلف باطل و $f(e)\neq ۰$ است.

□

در حالت کلی هسته یک $n-$همریختی جردن ممکن است یک ایده‌آل نباشد. برای مشاهده یک مثال نقض به منبع [۷] مراجعه شود. نتیجه زیر تحت شرایط خاص نشان می‌دهد که هسته یک $n-$همریختی جردن یک ایده‌آل است.

**قضیه ۲.** فرض کنید $n\in\{۲,۳,۴\}$ ثابت و $f:A \to B$ یک $n-$همریختی جردن از جبر باناخ یکدار $A$ به جبر باناخ جابجایی $B$ باشد به‌طوری‌که برای هر $a,b \in A$،

$$f(ab-ba)=۰. \qquad (۶)$$

دراین صورن هسته $f$ یک ایده‌آل در $A$ است.

برهان. حالت $n=۲$ ساده است. در واقع اگر $f$ یک همریختی جردن باشد، آنگاه از روابطه (۱) و (۶) نتیجه می‌شود که $f$ یک همریختی است. بنابراین هسته $f$ یک ایده‌آل در $A$ است. حالت $n=۳$ قضیه ۳.۵ از منبع [۹] می‌باشد. لذا فرض کنید $n=۴$ و $f:A \to B$ یک ۴-همریختی جردن ناصفر باشد. بنابراین برای هر $a\in A$، $f(a^{۴})=f(a)^{۴}$. بنابر رابطه (۴) برای هر $x,y \in A$،

$$I=۶f(x)^{۲}f(y)^{۲}. \qquad (۷)$$

بنابر فرض

$$\begin{aligned} f(xyxy)&=f(yxyx) \\ (x^{۲}y^{۲})&=f(y^{۲}x^{۲}), \end{aligned}$$

لذا با جایگذاری روابط فوق در رابطه (۷) به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} ۲f(x^{۲}y^{۲}+xyxy)+f(xy^{۲}x+yx^{۲}y) \\ =۶f(x)^{۲}f(y)^{۲}. \end{aligned} \qquad (۸)$$

با جایگذاری $a+b$ به‌جای $x$، در رابطه (۸)، تساوی زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned} &۲f(aby^{۲}+bay^{۲}+ayby+byay) \\ &+f(ay^{۲}b+by^{۲}a+yayb+ybya) \\ &=۱۲f(a)f(b)f(y)^{۲}. \end{aligned} \qquad (۹)$$

فرض کنید $a$ متعلق به هسته $f$ دلخواه باشد، لذا $f(a)=۰$. فرض کنید $e$ عنصر واحد $A$ باشد. با جایگذاری $e$ بجای $y$، در رابطه (۹) نتیجه می‌شود:

$$f(ab+ba)=۰. \qquad (۱۰)$$

بنابر فرض، $f(ab)=f(ba)$، لذا بنابر رابطه (۱۰)، $f(ab)=f(ba)=۰$. بنابراین $ab,ba$ متعلق به هسته $f$ است. در نتیجه هسته $f$ یک ایده‌آل در $A$ است. □

اکنون قضیه اصلی را بیان و اثبات می‌کنیم.

**قضیه ۳.** فرض کنید $n\in\{۲,۳,۴\}$ ثابت و $f:A \to B$ یک $n-$همریختی جردن از جبر باناخ یکدار $A$ به جبر باناخ جابجایی $B$ باشد به‌طوری‌که برای هر $a,b,x,y \in A$،

$$f(axby-aybx)=۰. \qquad (۱۱)$$

درا ین صورت $f$ یک $n-$همریختی است.

برهان. حالت $n=2$ ساده است. حالت $n=3$ قضیه ۲.۷ از منبع [۸] می‌باشد. فرض کنید $n=4$ و $f:A\to B$ یک ۴-همریختی جردن ناصفر باشد. لذا برای هر $a\in A$، $f(a^4)=f(a)^4$. بنابر رابطه (۴) برای هر $x,y\in A$، $I=6f(x)^2f(y)^2$ که در آن

$$I=f(x^2y^2+y^2x^2+xyxy+xy^2x+yxyx+yx^2y). \quad (12)$$

فرض کنید $e$ عنصر واحد $A$ باشد. با جایگذاری $e$ بجای $a$ و $b$ در رابطه (۱۱) برای هر $x,y\in A$، نتیجه می‌شود که

$$f(xy-yx)=0. \quad (13)$$

از روابط (۱۱) و (۱۳) نتیجه می‌شود که

$$f(xyxy)=f(yxyx)$$
$$f(xy^2x)=f(x^2y^2)=f(y^2x^2)=f(yx^2y),$$

با جایگذاری روابط فوق در رابطه (۱۲) به‌دست می‌آوریم:

$$2f(x^2y^2)+f(xyxy)=3f(x)^2f(y)^2. \quad (14)$$

با جایگذاری $a+b$ بجای $x$، در رابطه (۱۴)، تساوی زیر حاصل می‌شود:

$$2f(aby^2+bay^2)+f(ayby+byay)=6f(a)f(b)f(y)^2. \quad (15)$$

تعویض $x+y$ با $y$ در رابطه (۱۵)، نشان می‌دهد که

$$\begin{aligned}&2f(abxy+abyx+baxy+bayx)\\&+f(axby+aybx+bxay+byax)\\&=12f(a)f(b)f(x)f(y).\end{aligned} \quad (16)$$

از رابطه (۱۱) نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned}f(byax)&=f(bxay)\\f(aybx)&=f(axby).\end{aligned} \quad (17)$$

از طرفی بنابر قضیه قبل هسته $f$ یک ایده‌آل در $A$ است، لذا بنابر رابطه (۱۳)،

$$f(bxay)=f(baxy)=f(bayx). \quad (18)$$
$$f(axby)=f(abxy)=f(abyx)$$
$$=f(bayx).$$

با جایگذاری روابط (۱۷) و (۱۸) در رابطه (۱۶) نتیجه می‌شود که برای هر $a,b,x,y\in A$،

$$f(abxy)=f(a)f(b)f(x)f(y).$$

بنابراین $f$ یک ۴-همریختی است. □

## ۳ یک تجزیه از همریختی‌های جردن

**لم ۲.** هر همریختی جردن $f$ بین جبرهای باناخ $A$ و $B$ یک $n-$همریختی جردن است.

برهان. فرض می‌کنیم که $f$ یک همریختی جردن باشد، لذا برای هر $a,b\in A$،

$$f(ab+ba)=f(a)f(b)+f(b)f(a). \quad (19)$$

با جایگذاری $a^2$ به‌جای $b$ در رابطه (۱۹) نتیجه می‌شود که برای هر $a\in A$،

$$f(a^3)=f(a)^3. \quad (20)$$

بنابراین $f$ یک ۳-همریختی جردن است. با جایگذاری $a^3$ به‌جای $b$ در رابطه (۱۹) عبارت زیر به‌دست می‌آید:

$$2f(a^4)=f(a)f(a^3)+f(a^3)f(a). \quad (21)$$

بنابر روابط (۲۰) و (۲۱)، برای هر $a\in A$، $f(a^4)=f(a)^4$. لذا $f$ یک ۴-همریختی جردن است. اکنون یک بحث استقرایی نشان می‌دهد که حکم برای هر $n\in\mathbb{N}$ برقرار است. □

تابع خطی $f$ بین جبرهای باناخ یکدار $A$ و $B$ یکدار نامیده می‌شود هرگاه $f(e)=e'$ که در آن $e$ همانی جبر باناخ $A$ و $e'$ همانی جبر باناخ $B$ است.

**قضیه ۴.** برای $n \geq ۲$، هر $(n+1)$–همریختی جردن یکدار $f$ بین جبرهای باناخ $A$ و $B$ یک $n$–همریختی جردن است.

برهان. فرض کنید $n=۲$ و $f:A\to B$ یک ۳-همریختی جردن یکدار باشد. در این صورت برای هر $a\in A$،

$$f(a^{۳})=f(a)^{۳}. \qquad (۲۲)$$

با جایگذاری $a+e$ بجای $a$ در رابطه (۲۲) به‌دست می‌آوریم، $f(a^{۲})=f(a)^{۲}$. بنابراین $f$ یک همریختی جردن است. اکنون فرض کنید $n=۳$ و $f:A\to B$ یک ۴-همریختی جردن یکدار باشد. بنابراین برای هر $a\in A$،

$$f(a^{۴})=f(a)^{۴}. \qquad (۲۳)$$

با جایگذاری $a+e$ به‌جای $a$ در رابطه (۲۳) داریم

$$f(۳a^{۲}+۲a^{۳})=۳f(a)^{۲}+۲f(a)^{۳}. \qquad (۲۴)$$

با جایگذاری $a+e$ بجای $a$ در رابطه (۲۴)، تساوی زیر حاصل می‌شود:

$$f(a^{۲})=f(a)^{۲}. \qquad (۲۵)$$

از روابط (۲۴) و (۲۵) نتیجه می‌شود که برای هر $a\in A$، $f(a^{۳})=f(a)^{۳}$. لذا $f$ یک ۳-همریختی جردن است. یک بحث مشابه نشان می‌دهد که حکم برای هر $n\geq ۴$، برقرار است. □

نتیجه زیر از لم ۱ و قضیه ۲ به‌دست می‌آید.

**نتیجه ۱.** تابع خطی و یکدار $f$ بین جبرهای باناخ $A$ و $B$ یک همریختی جردن است اگروتنها اگر برای $n\geq ۲$، یک $n$–همریختی جردن باشد.

## References


[1] S. Hejazian, M. Mirzavaziri, M.S. Moslehian, n-Homomorphisms, Bull. Iranian Math. Soc. , 31 (2005) 13-23.

[2] J. Bracic, M.S. Moslehian, On automatic continuity of 3-homomorphisms on Banach algebras, Bull. Malaysian. Math. Sci. Soc., 30 (2007) 195-200.

[3] M.E. Gordji, n-Jordan homomorphisms, Bull. Aust. Math. Soc., 80 (2009) 159-164.

[4] T.W. Palmer, Banach Algebras and the General Theory of*-Algebras: Volume 2,*-Algebras, Cambridge University Press, 1994.

[5] E. Gselmann, On approximate n-Jordan homomorphisms, in: Annales Math. Silesianae, 2014, pp. 47-58.

[6] W. Żelazko, A characterization of multiplicative linear functionals in complex Banach algebras, Studia Math., 30 (1968) 83-85.

[7] A. Zivari-kazempour, A characterization of Jordan homomorphism on Banach algebras, Chinese J. Math., 2014 (2014).

[8] A. Zivari-kazempour, A characterization of 3-Jordan homomorphism on Banach algebras, Bull. Aust. Math. Soc., 93 (2016) 301-306.

[9] A. Zivari-Kazempour, A characterization of Jordan and 5-Jordan homomorphisms between Banach algebras, Asian-European J. Math., 11 (2018) 1850021.