Complex and Nonlinear Systems
Vol. 1, No. 2, Winter 2018, pp. 107-111

سیستم‌های مختلط و غیرخطی
سال ۱، دوره ۱، شماره ۲، زمستان ۱۳۹۶، صص ۱۰۷ تا ۱۱۱

کرانداری و معکوس‌پذیری عملگر ضرب نقطه‌ای روی فضاهای وزن‌دار از توابع هولومورفیک روی نیم‌صفحه بالا

محمدعلی اردلانی*

استادیار، گروه ریاضی محض، دانشکده علوم پایه، دانشگاه کردستان

تاریخ دریافت: ۱۳۹۶/۱۰/ ۱۷ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۶/۱۱/۲۵

Boundedness and invertibility of a pointwise multiplication operator on weighted spaces of holomorphic functions on the upper half-plane

Mohammad Ali Ardalani

Assistant Professor, Department of Pure Mathematics, University of Kurdistan

Received: 1/7/2018 Accepted: 2/14/2018

چکیده: در این مقاله شرایط لازم و کافی برای کرانداری و معکوس‌پذیری عملگر ضرب نقطه‌ای روی فضاهای وزن‌دار از توابع هولومورفیک روی نیم‌صفحه بالا را می‌یابیم، جایی که وزن‌های ما لزوماً در هیچ شرط رشدی صدق نمی‌کنند. همچنین نشان می‌دهیم عملگر ضرب نقطه‌ای روی این فضاها فشرده نیست. در پایان نیز یک سوال باز مطرح می‌کنیم.

کلمات کلیدی: فضاهای وزن‌دار، توابع هولومورفیک، عملگر ضرب نقطه‌ای، تابع وزن.

Abstract: In this paper, we find necessary and sufficient conditions for boundedness and invertibility of pointwise multiplication operator on weighted spaces of holomorphic functions on the upper half-plane where our weights does not satisfy any growth conditions necessarily. We also show that pointwise multiplication operator is not a compact operator on these spaces. Finally, we present an open problem.

Keywords: weighted spaces, holomophic functions, pointwise multiplication operator, weight function.

۱ مقدمه

همانگونه که در [۱] کرانداری و معکوس‌پذیری عملگر ضرب نقطه‌ای به عنوان یک خود نگاشت روی فضاهای وزن‌دار از توابع هولومورفیک روی گوی یکه مورد مطالعه قرار گرفته است، هدف این مقاله یافتن شرط لازم و کافی برای کرانداری و همچنین معکوس‌پذیری عملگر ضرب نقطه‌ای به عنوان یک خودنگاشت روی فضاهای وزن‌دار از توابع هولومورفیک روی نیم‌صفحه بالا می‌باشد. نکته قابل توجه این است که نتایجی که برای عملگر ضرب نقطه‌ای به دست می‌آوریم به خواص تابع وزن بستگی ندارند؛ یعنی لازم نیست که تابع وزن در شرایط رشدی (*) یا (**) که در [۲] معرفی شده‌اند

*نویسنده مسئول

*Corresponding author: m.ardalani@uok.ac.ir

صدق کنند. همچنین طیف عملگر ضرب نقطه‌ای را محاسبه کرده و با استفاده از آن نشان می‌دهیم عملگر ضرب نقطه‌ای فشرده نیست. نهایتاً این مقاله را با مطرح کردن یک سوال باز به پایان می‌رسانیم. حال به ذکر تعاریف و مفاهیمی می‌پردازیم که در ادامه این مقاله مورد نیاز هستند.

فرض کنید $G=\{\omega\in\mathbb{C}: Im\,\omega>0\}$ نیم‌صفحه بالادرصفحه مختلط $\mathbb{C}$ باشد. دراین صورت تابع $\mathrm{f}:\mathrm{G}\to\mathbb{C}$ را مشتق‌پذیر یا هولومورفیک روی G می‌نامیم هرگاه f در هر نقطه‌ای از G مشتق‌پذیر باشد. مجموعه تمام توابع هولومورفیک روی G را با نماد $H(G)$ نشان می‌دهیم. تابع پیوسته و مثبت $\upsilon:\mathrm{G}\to(0,\infty)$ را یک وزن روی G می‌نامیم. برای $f\in H(G)$، نرم سوپریمم وزنی f، یعنی $\|f\|_\upsilon$ و فضای وزن‌دار از توابع هولومورفیک روی G، یعنی $H_\upsilon(G)$ را به‌ترتیب به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\|f\|_\upsilon=\sup_{\omega\in G}|f(\omega)|\upsilon(\omega)$$

و

$$H_\upsilon(G)=\left\{f\in H(G):\|f\|_\upsilon<\infty\right\}.$$

تعریف ۱. تابع هولومورفیک $\psi\in H(G)$ را ضربگر $H_\upsilon(G)$ می‌نامیم هرگاه به ازای هر $f\in H_\upsilon(G)$ داشته باشیم $\psi f\in H_\upsilon(G)$. همچنین مجموعه تمام ضربگرهای $H_\upsilon(G)$ را با $M(H_\upsilon(G))$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۲. تابع هولومورفیک $f\in H(G)$ را کراندار گوییم هرگاه ثابت مثبتی مانند M وجود داشته باشد به‌طوری‌که

$$\forall\omega\in G\ |f(\omega)|\le M.$$

مجموعه تمام توابع کراندار و هولومورفیک روی G را با نماد $H^\infty(G)$ نشان می‌دهیم.

مثال ۱. اگر $f:G\to C$ را با ضابطه $f(\omega)=e^{i\omega}$ تعریف کنیم، آنگاه به‌وضوح داریم $f\in H^\infty(G)$.

تعریف ۳. فرض کنید $\varphi\in H(G)$ و φ تابع ثابت نباشد. در این صورت عملگر ضرب نقطه‌ای $M_\varphi:H(G)\to H(G)$ چنین تعریف می‌شود $M_\varphi(f)=\varphi f$.

تذکر ۱. اگر عملگر ضرب نقطه‌ای M_φ را روی فضای $H_\upsilon(G)$ در نظر بگیریم، به‌وضوح داریم $M_\varphi(f)=\varphi f\in H(G)$. اما $\|\varphi f\|_\upsilon$ لزوماً متناهی نیست. یعنی φf لزوماً عضوی از $H_\upsilon(G)$ نیست.

مقدمه را با یادآوری دو قضیه کلاسیک از آنالیز تابعی به پایان می‌رسانیم.

قضیه ۱. فرض کنید X و Y فضاهای باناخ و $T:X\to Y$ یک تبدیل خطی فشرده باشد. در این صورت طیف T، حداکثر تعداد شمارش‌پذیر عضو دارد.

برهان. قضیه ۱.۷ از [۳] را ببینید. □

قضیه گراف بسته: فرض کنید X و Y فضاهای باناخ و $T:X\to Y$ یک تبدیل خطی با گراف بسته باشد. در این صورت T پیوسته است.

برهان. قضیه ۱.۳ از [۴] را ببینید. □

۲ نتایج اصلی

همان‌طور که در تذکر ۱ گفته شد، عملگر ضرب نقطه‌ای از $H_{\upsilon}(G)$ به $H_{\upsilon}(G)$ لزوماً خوش‌تعریف نیست؛ اما قضیه زیر شرط لازم و کافی برای خوش‌تعریفی و کرانداری عملگر ضرب نقطه‌ای را ارائه می‌دهد.

قضیه ۲. فرض کنید υ یک تابع وزن باشد. در این صورت موارد زیر معادل هستند:

(۱) عملگر $M_{\varphi}: H_{\upsilon}(G) \to H_{\upsilon}(G)$ کراندار (پیوسته) است.

(۲) $\varphi \in H^{\infty}(G)$.

برهان. فرض کنید (۱) برقرار باشد. در این صورت چون M_{φ} کراندار است، لذا ثابت مثبتی مانند M وجود دارد به‌طوری‌که به‌ازای هر $f \in H_{\upsilon}(G)$ داریم

$$\begin{aligned}\left\|M_{\varphi}(f)\right\|_{\upsilon} &= \|\varphi f\|_{\upsilon} \\ &= Sup_{\omega \in G}|\varphi(\omega)||f(\omega)|\upsilon(\omega) \leq M .\end{aligned}$$

همچنین $\|f\|_{\upsilon} = Sup|f(\omega)|\upsilon(\omega) < \infty$. بنابراین

$$Sup_{\omega \in G}|\varphi(\omega)| < \infty$$

یعنی $\varphi \in H^{\infty}(G)$.

برعکس، اگر (۲) برقرار باشد، آنگاه خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\left\|M_{\varphi}(f)\right\|_{\upsilon} &= \|\varphi f\|_{\upsilon} \\ &\leq \|f\|_{\upsilon} Sup|\varphi(\omega)| \leq M\|f\|_{\upsilon}\end{aligned}$$

و در نتیجه M_{φ} کراندار است. □

حال از قضیه ۲ و تعریف ضربگر $H_{\upsilon}(G)$ نتیجه زیر را خواهیم داشت.

نتیجه ۱. فرض کنید υ یک تابع وزن باشد. در این صورت داریم $\varphi \in M(H_{\upsilon}(G)) \Leftrightarrow \varphi \in H^{\infty}(G)$. به‌طور معادل نتیجه می‌شود

$$M(H_{\upsilon}(G)) = H^{\infty}(G).$$

در قضیه زیر شرط لازم و کافی برای معکوس‌پذیری عملگر ضرب نقطه‌ای را بیان می‌کنیم. اما قبل از بیان قضیه، یادآوری این نکته که $H_{\upsilon}(G)$ یک فضای باناخ است ضروری می‌باشد ([1] را ببینید).

قضیه ۳. فرض کنید υ یک تابع وزن باشد و $\varphi \in H^{\infty}(G)$. در این صورت موارد زیر معادل هستند:

(۱) عملگر $M_{\varphi}: H_{\upsilon}(G) \to H_{\upsilon}(G)$ معکوس‌پذیر (یا به‌طور معادل پوشا) است.

(۲) $\frac{1}{\varphi} \in H^{\infty}(G)$، یعنی ثابت $K > 0$ وجود دارد به‌طوری‌که $\forall\ \omega \in G|\varphi(\omega)| \geq K$.

برهان. فرض کنید (۱) برقرار باشد. در این صورت چون M_{φ} یک عملگر خطی پوشا از فضای باناخ $H_{\upsilon}(G)$ به $H_{\upsilon}(G)$ می‌باشد، لذا $graph(M_{\varphi}) = H_{\upsilon}(G) \times H_{\upsilon}(G)$ بسته است. بنابراین از قضیه گراف بسته نتیجه می‌شود M_{φ} پیوسته است. همچنین معکوس M_{φ} نیز باید به عنوان یک عملگر خطی بین فضاهای باناخ پیوسته باشد. اما به‌وضوح معکوس M_{φ} باید به فرم $M_{\frac{1}{\varphi}}$ باشد. حال از قضیه ۲ نتیجه می‌شود که $\frac{1}{\varphi} \in H^{\infty}(G)$.

برعکس، اگر $\frac{1}{\varphi} \in H^{\infty}(G)$، آنگاه از قضیه ۲ نتیجه می‌شود که $M_{\frac{1}{\varphi}}$ یک عملگر خطی پیوسته روی

$H_{\upsilon}(G)$ است و معکوس آن یعنی M_{φ} نیز به عنوان یک عملگر خطی معکوس‌پذیر می‌باشد. □

با توجه به آنچه که ثابت شد، اگر $\varphi \in H^{\infty}(G)$، آنگاه $M_{\varphi}: H_{\upsilon}(G) \to H_{\upsilon}(G)$ یک عملگر خطی کراندار است. اگر I عملگر همانی باشد طیف M_{φ} یعنی $\sigma(M_{\varphi})$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\sigma(M_{\varphi}) = \left\{\lambda \in C : \lambda I - M_{\varphi} \notin Inv\,(B\,(H_{\upsilon}(G)))\right\}$$

که در آن $Inv(B(H_{\upsilon}(G)))$ مجموعه تمام تبدیلات خطی کراندار و معکوس‌پذیر روی $H_{\upsilon}(G)$ است.

تذکر ۲. به‌وضوح خواهیم داشت

$$\left(\lambda I - M_{\varphi}\right)(f) = \lambda f - \varphi f = \left(\lambda - \varphi\right) f = M_{\lambda-\varphi}(f)$$

بنابراین $\lambda I - M_{\varphi} = M_{\lambda-\varphi}$.

قضیه ۴. $\sigma(M_{\varphi}) = \overline{\varphi(G)}$.

برهان. اگر $\lambda \in \sigma\left(M_{\varphi}\right)$، آنگاه عنصر $M_{\lambda-\varphi} = \lambda I - M_{\varphi}$ معکوس‌پذیر نیست. لذا از قضیه ۳ نتیجه می‌شود $\frac{1}{\lambda-\varphi} \notin H^{\infty}(G)$؛ یعنی به‌ازای هر $n \in N$ عنصری مانند $\omega_n \in G$ وجود دارد به‌طوری‌که $\frac{1}{\left|\varphi(\omega_n)-\lambda\right|} \geq n$. به‌طور معادل داریم

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \exists \omega_n \in G \;\; s.t \left|\varphi\left(\omega_n\right)-\lambda\right| \leq \frac{1}{n}$$

$$\forall n \in N, \quad \exists \omega_n \in G \quad s.t \quad \left|\varphi\left(\omega_n\right)-\lambda\right| \leq \frac{1}{n}.$$

بنابراین خواهیم داشت $\lambda \in \overline{\varphi(G)}$. برعکس، اگر $\lambda \in \overline{\varphi(G)}$، آنگاه با روند مشابه بالا نتیجه می‌شود $\lambda \in \sigma\left(M_{\varphi}\right)$. □

قضیه ۵. اگر $\varphi \in H^{\infty}(G)$، آنگاه $M_{\varphi}: H_{\upsilon}(G) \to H_{\upsilon}(G)$ یک عملگر فشرده نیست.

برهان. چون φ روی G یک تابع غیرثابت پیوسته و G همبند است، لذا $\varphi(G)$ تک‌نقطه‌ای نیست و به عنوان یک زیر مجموعه همبند از C شمارش‌پذیر نیست. بنابراین $\sigma\left(M_{\varphi}\right) = \overline{\varphi(G)}$ نیز یک مجموعه شمارش‌ناپذیر است و اکنون با توجه به قضیه ۱ حکم ثابت می‌شود. □

در پایان به یادآوری تعریف عملگر فردهلم و طرح یک سوال باز می‌پردازیم. فرض کنید X و Y فضاهای نرم‌دار و نگاشت $T: X \to Y$ یک تبدیل خطی کراندار باشد. در این صورت T را یک عملگر فردهلم گوییم هرگاه

(۱) $\dim Ker(T) < \infty$.

(۲) $\operatorname{Im} T$ بسته و $\dim \frac{Y}{\operatorname{Im} T} < \infty$.

سوال باز. آیا می‌توان یک شرط لازم و کافی برای فردهلم بودن عملگر ضرب نقطه‌ای $M_{\varphi}: H_{\upsilon}(G) \to H_{\upsilon}(G)$ بدون اعمال شرایط رشدی بر وزن υ یافت؟

References

[1] M.L. Abo, Pointwise multiplication operators on weighted Banach spaces of analytic functions, Studia Math., 137 (1999) 177-194.

[2] M.A. Ardalani, W. Lusky, Weighted spaces of holomorphic functions on the upper halfplane, Math. Scandinavica, 111 (2012) 244-260.

[3] J.B. Conway, A course in functional analysis, Springer Science & Business Media, 2013.

[4] S. Lang, Real and functional analysis, vol. 142 of Graduate Texts in Mathematics, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 3 (1993) 5.