

زیر رده‌های خاص از توابع دو-مقداری وابسته به عملگر کوماتو

سمیرا رهروی^{۱*}، حسین پیری^۲

۱. استادیار، گروه ریاضی، دانشگاه بناب
۲. دانشیار، گروه ریاضی، دانشگاه بناب

تاریخ دریافت: ۱۳۹۶/۰۵/۰۳ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۶/۱۱/۱۴

Certain subclasses of bi-univalent functions associated with Komatu operator

Samira Rahrovi^{1,*}, Hossein Piri²

1. Assistant Professor, Department of Mathematics, University of Bonab
2. Associate Professor, Department of Mathematics, University of Bonab

Received: 7/25/2017

Accepted: 2/3/2018

Abstract: In the present paper, we introduce and investigate new subclasses of the function class Σ of bi-univalent functions defined on the open unit disk U which are associated with the Komatu operator. Furthermore, we find some estimations on the coefficients $|a_2|$ and $|a_3|$ for functions in these new subclasses. Several new consequences of the results are also pointed out.

Keywords: bi-univalent function, Starlike function, Convex function of order α , Komatu operator, Salagean operator.

چکیده: فرض کنیم Σ رده توابع دو-مقداری تعریف شده در قرص یکه U باشد. در این تحقیق زیررده‌های جدیدی از توابع رده Σ وابسته به عملگر کوماتو را معرفی نموده و تقریبی برای ضرایب $|a_2|$ و $|a_3|$ می‌یابیم. همچنین نتایج جدیدی وابسته به رده‌های مذکور را به دست می‌آوریم.

کلمات کلیدی: تابع دو-مقداری، تابع ستاره‌گون، تابع محدب از مرتبه α ، عملگر کوماتو، عملگر سالاجین.

۱ مقدمه

A را رده توابع تحلیلی بر قرص یکه $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ به فرم زیر در نظر بگیرید:

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \quad (1)$$

فرض کنید زیررده S از A ، زیر رده توابع تک‌مقداری بر U باشد. تابع $f \in S$ ستاره‌گون از مرتبه α ($0 \leq \alpha < 1$) در U نامیده می‌شود، هرگاه

$$\operatorname{Re} \left(\frac{zf'(z)}{f(z)} \right) > \alpha.$$

این رده با نماد $S^*(\alpha)$ نشان داده می‌شود. تابع $f \in A$ محدب از مرتبه α بر U نامیده می‌شود، هرگاه

$$\operatorname{Re} \left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right) > \alpha.$$

$K(\alpha)$ برای نمایش چنین رده‌ای به کار برده می‌شود.

*Corresponding author: sarahrovi@gmail.com

(ج) برای $a=2$ و $\lambda=k$ (k عدد صحیح دلخواه) عملگر $L_a^k = L^k$ به دست می‌آید که توسط رالجدی^۴ و سومانتا^۵ در [۵] بررسی شده است.

(د) برای $a=2$ ، عملگر ضربی $L_a^\lambda = I^\lambda$ حاصل می‌گردد که توسط جونگ^۶ و همکاران در [۶] بررسی شده است.

برای هر $f \in S$ ، قضیه $\frac{1}{4}$ -کوبه بیان می‌کند که تصویر U تحت f ، شامل قرصی به شعاع $\frac{1}{4}$ است. بنابراین هر تابع تک‌مقداری $f \in S$ دارای معکوسی مانند f^{-1} است که برای هر $z \in U$ در شرایط زیر صدق می‌کند:

$$f^{-1}(f(z)) = z, \quad z \in U$$

و

$$f(f^{-1}(w)) = w, \quad |w| < r(f), \quad r(f) \geq \frac{1}{4}.$$

تعریف ۱. هرگاه توابع f و f^{-1} در U تک‌ارز باشند، تابع $f \in A$ دو-مقداری نامیده می‌شود. رده توابع دو-مقداری را با Σ نشان می‌دهیم.

اگر نگاهیست f معرفی شده در رابطه (۱)، یک تابع دو-مقداری باشد، آنگاه با فرض $g = f^{-1}$ و انجام عملیات ساده داریم:

$$g(w) = w - a_\gamma w^\gamma + (\gamma a_\gamma - a_\gamma) w^\gamma - (\delta a_\gamma - \delta a_\gamma a_\gamma + a_\gamma) w^\delta + \dots \quad (3)$$

رده توابع دو-مقداری در قرص U را لوین^۱ در [۷] معرفی نمود و نشان داد که برای هر

اخیراً کوماتو^۱ [۱]، عملگر انتگرالی L_a^λ را به فرم زیر معرفی نموده است:

$$L_a^\lambda f(z) = \frac{a^\lambda}{\Gamma(\lambda)} \int_0^1 t^{a-2} \left(\log \frac{1}{t} \right)^{\lambda-1} f(zt) dt, \quad (2)$$

$$z \in U, a > 0, \lambda \geq 0.$$

لذا، اگر $f \in A$ دارای نمایشی به فرم

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

داریم:

$$L_a^\lambda f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a}{a+n-1} \right)^\lambda a_n z^n,$$

$$a > 0, \lambda \geq 0.$$

تذکر ۱. از نمایش عملگر L_a^λ به فرم سری می‌توان عملگر L_a^λ را برای هر λ حقیقی تعریف نمود [۲]. همچنین از تعریف عملگر L_a^λ به فرم سری، رابطه زیر به سادگی حاصل می‌شود:

$$z(L_a^{\lambda+1} f(z))' = a L_a^\lambda f(z) - (a-1) L_a^{\lambda+1} f(z),$$

$$a > 0, \lambda \geq 0.$$

توجه شود که:

(الف) برای $a=1$ و $\lambda=k$ (k عدد صحیح دلخواه) عملگر ضربی $L_1^k = I^k$ به دست می‌آید که توسط فلت^۲ [۳] و سالاجین^۳ در [۴] بررسی شده است.

(ب) برای $a=1$ و $\lambda=-k$ و $k \in \mathbb{N}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$ عملگر دیفرانسیل $L_1^{-k} = D^k$ معروف به عملگر سالاجین [۴] به دست می‌آید.

⁴ Uralegaddi

⁵ Somantha

⁶ Jung

¹ Komatu

² Flett

³ Salagean

به طوری که $\lambda \geq 0$ ، $0 < \alpha < 1$ ، $0 \leq \gamma \leq 1$ تابع f توسط رابطه (۱) تعریف شده و $g(w) = f^{-1}(w)$ به فرم (۳) باشد. تابع f را عضو رده $P_{\Sigma}(\gamma, \alpha, \lambda)$ گوئیم، هرگاه در روابط

$$\left| \arg \left\{ \frac{z(L_a^{\lambda} f(z))' + \gamma z^{\gamma} (L_a^{\lambda} f(z))^{\gamma}}{(1-\gamma)L_a^{\lambda} f(z) + \gamma z(L_a^{\lambda} f(z))'} \right\} \right| < \frac{\alpha\pi}{2}, \quad (4)$$

و

$$\left| \arg \left\{ \frac{w(L_a^{\lambda} g(w))' + \gamma w^{\gamma} (L_a^{\lambda} g(w))^{\gamma}}{(1-\gamma)L_a^{\lambda} g(w) + \gamma w(L_a^{\lambda} g(w))'} \right\} \right| < \frac{\alpha\pi}{2}, \quad (5)$$

صدق کند.

قضیه ۱. اگر تابع f در کلاس $P_{\Sigma}(\gamma, \alpha, \lambda)$ باشد، آنگاه

$$|a_r| \leq \frac{r\alpha}{\sqrt{r\alpha(r\gamma+1)\left(\frac{a}{a+r}\right)^{\lambda} - (\gamma+1)^r \left(\frac{a}{a+1}\right)^{r\lambda} (r\alpha-1)}} \quad (6)$$

و

$$|a_r| \leq \frac{\alpha}{(r\gamma+1)\left(\frac{a}{a+r}\right)^{\lambda}} + \frac{r\alpha^r}{(\gamma+1)^r \left(\frac{a}{a+1}\right)^{r\lambda}}.$$

برهان. فرض کنید $g = f^{-1}$. چون $f \in P_{\Sigma}(\gamma, \alpha, \lambda)$ ، لذا از روابط (۴) و (۵) به دست می‌آوریم:

$$\frac{z(L_a^{\lambda} f(z))' + \gamma z^{\gamma} (L_a^{\lambda} f(z))^{\gamma}}{(1-\gamma)L_a^{\lambda} f(z) + \gamma z(L_a^{\lambda} f(z))'} = p(z)^{\alpha}, \quad (7)$$

و

$$\frac{w(L_a^{\lambda} g(w))' + \gamma w^{\gamma} (L_a^{\lambda} g(w))^{\gamma}}{(1-\gamma)L_a^{\lambda} g(w) + \gamma w(L_a^{\lambda} g(w))'} = q(w)^{\alpha}, \quad (8)$$

که در آن توابع $p(z)$ و $q(w)$ در کلاس P قرار دارند و به صورت زیر می‌باشند:

$$p(z) = 1 + p_1 z + p_2 z^2 + \dots, \quad (9)$$

بر $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \in \Sigma$ داریم $|a_r| < 1/51$.

این اساس، برانان^۲ و کلونیه^۳ [۸] برای هر $f \in \Sigma$ حدس $|a_r| \leq \sqrt{2}$ را مطرح نمودند. نتانیاهو^۴ [۹] نشان داد که برای هر $f \in \Sigma$ داریم $|a_r| = \frac{4}{3}$. همچنین برانان و تاهاه^۵ [۱۰] زیررده‌های خاصی از توابع دو-مقداری مشابه زیررده‌های توابع تک‌مقداری، شامل قویاً ستاره‌گون، ستاره‌گون و محدب را بررسی کردند. آنها رده توابع دو-ستاره‌گون و دو-محدب را معرفی نمودند و برای ضرایب ابتدایی آن تقریب‌هایی را به دست آوردند. اخیراً پژوهشگران بسیاری [۲، ۱۱، ۱۲] کران‌هایی را برای رده‌های متنوعی از توابع دو-مقداری به دست آورده‌اند.

متذکر می‌شویم که رده Σ تهی نیست، زیرا توابع

$$z, \frac{z}{1-z}, -\log(1-z), \frac{1}{2} \log \frac{1+z}{1-z}$$

عضو رده Σ می‌باشند. با این وجود، تابع کوبه عضو رده Σ نیست.

لم ۱. فرض کنید P خانواده تمام توابع مانند h باشد که بر U تحلیلی است و به‌ازای هر $z \in U$ ، $\operatorname{Re}(h(z)) > 0$

$$h(z) = 1 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \dots, \quad z \in U$$

اگر $h \in P$ ، آنگاه $|c_k| \leq 2$.

۲ تقریب ضرایب

تعریف ۲. فرض کنید γ ، α و λ اعداد حقیقی باشد

¹ Lewin

² Brannan

³ Clunie

⁴ Netanyahu

⁵ Taha

این رابطه همان کران تعریف شده برای $|a_r|$ در رابطه (۶) است.

حال کران $|a_3|$ را به دست می‌آوریم. برای این منظور با تفریق (۱۴) از (۱۲) داریم:

$$r\alpha(r\gamma+1)\left(\frac{a}{a+r}\right)^\lambda (a_r - a_r^r) = \alpha(p_r - q_r). \quad (17)$$

از روابط (۱۵) و (۱۶) و (۱۷) نتیجه می‌شود

$$a_r = \frac{\alpha(p_r - q_r)}{r\alpha(r\gamma+1)\left(\frac{a}{a+r}\right)^\lambda} + \frac{\alpha^r(p_r^r + q_r^r)}{r(\gamma+1)^r\left(\frac{a}{a+1}\right)^{r\lambda}}.$$

با به کارگیری دوباره

لم ۱ برای ضرایب p_r و q_r رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$|a_r| \leq \frac{\alpha}{(r\gamma+1)\left(\frac{a}{a+r}\right)^\lambda} + \frac{r\alpha^r}{(\gamma+1)^r\left(\frac{a}{a+1}\right)^{r\lambda}}.$$

لذا حکم اثبات می‌شود. \square

تعریف ۳. فرض کنید β, γ و λ اعداد حقیقی باشند به طوری که $\lambda \geq 0, 0 \leq \gamma \leq 1, 0 \leq \beta \leq 1$ ، توسط رابطه (۱) تعریف شده باشد و g توسیع f^{-1} بر U باشد. تابع f عضو رده $H_\Sigma(\gamma, \beta, \lambda)$ نامیده می‌شود، هرگاه در روابط

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{z(L_a^\lambda f(z))' + \gamma z^r (L_a^\lambda f(z))''}{(1-\gamma)L_a^\lambda f(z) + \gamma z(L_a^\lambda f(z))'} \right\} > \beta, \quad (18)$$

و

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{w(L_a^\lambda g(w))' + \gamma w^r (L_a^\lambda g(w))''}{(1-\gamma)L_a^\lambda g(w) + \gamma w(L_a^\lambda g(w))'} \right\} > \beta, \quad (19)$$

صدق کند.

قضیه ۲. اگر تابع f ، عضو رده $H_\Sigma(\gamma, \beta, \lambda)$ باشد،

$$q(w) = 1 + q_1 w + q_2 w^2 + \dots \quad (10)$$

از مساوی قرار دادن ضرایب در روابط (۷) و (۸) روابط زیر نتیجه می‌شوند:

$$(\gamma+1)\left(\frac{a}{a+1}\right)^\lambda a_r = \alpha p_1, \quad (11)$$

$$r(r\gamma+1)\left(\frac{a}{a+r}\right)^\lambda a_r - (\gamma+1)^r\left(\frac{a}{a+1}\right)^{r\lambda} a_r^r = \alpha p_r + \frac{\alpha(\alpha-1)}{r} p_1^r, \quad (12)$$

$$-(\gamma+1)\left(\frac{a}{a+1}\right)^\lambda a_r = \alpha q_1, \quad (13)$$

$$r(r\gamma+1)\left(\frac{a}{a+r}\right)^\lambda (r a_r^r - a_r) - (\gamma+1)^r\left(\frac{a}{a+1}\right)^{r\lambda} a_r^r = \alpha q_r + \frac{\alpha(\alpha-1)}{r} q_1^r. \quad (14)$$

از روابط (۱۱) و (۱۳) به دست می‌آوریم:

$$p_1 = -q_1 \quad (15)$$

$$r(\gamma+1)^r\left(\frac{a}{a+1}\right)^{r\lambda} a_r^r = \alpha^r(p_1^r + q_1^r). \quad (16)$$

از جمع زدن طرفین روابط (۱۲) و (۱۴) نتیجه می‌شود

$$\left(r\alpha(r\gamma+1)\left(\frac{a}{a+r}\right)^\lambda - (\gamma+1)^r\left(\frac{a}{a+1}\right)^{r\lambda} (r\alpha-1) \right) a_r^r = \alpha^r(p_r + q_r),$$

لذا

$$a_r^r = \frac{\alpha^r(p_r + q_r)}{r\alpha(r\gamma+1)\left(\frac{a}{a+r}\right)^\lambda - (\gamma+1)^r\left(\frac{a}{a+1}\right)^{r\lambda} (r\alpha-1)}$$

با به کار بردن

لم ۱ برای ضرایب p_r و q_r به دست می‌آوریم:

$$|a_r| \leq \frac{r\alpha}{\sqrt{r\alpha(r\gamma+1)\left(\frac{a}{a+r}\right)^\lambda - (\gamma+1)^r\left(\frac{a}{a+1}\right)^{r\lambda} (r\alpha-1)}}$$

از روابط (۲۴) و (۲۶) نتیجه می‌شود:

$$p_1 = -q_1. \quad (28)$$

همچنین از (۲۵)، (۲۷) و (۲۸) نتیجه زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} \gamma(\gamma+1)^{\gamma} \left(\frac{a}{a+1}\right)^{\gamma\lambda} a_{\gamma}^{\gamma} &= (1-\beta)^{\gamma} (p_{\gamma}^{\gamma} + q_{\gamma}^{\gamma}), \quad (29) \\ \gamma(\gamma+1)^{\gamma} \left(\frac{a}{a+1}\right)^{\gamma\lambda} a_{\gamma}^{\gamma} - \gamma(\gamma+1)^{\gamma} \left(\frac{a}{a+1}\right)^{\gamma\lambda} a_{\gamma}^{\gamma} & \\ &= (1-\beta)(p_{\gamma} + q_{\gamma}). \end{aligned}$$

بنابراین

$$a_{\gamma}^{\gamma} = \frac{(1-\beta)(p_{\gamma} + q_{\gamma})}{\gamma \left(\gamma(\gamma+1)^{\gamma} \left(\frac{a}{a+1}\right)^{\gamma\lambda} - (\gamma+1)^{\gamma} \left(\frac{a}{a+1}\right)^{\gamma\lambda} \right)}.$$

حال با به کار بردن لم ۲، رابطه (۲۰) حاصل می‌شود.

از روابط (۲۵) و (۲۷) داریم:

$$\gamma(\gamma+1)^{\gamma} \left(\frac{a}{a+1}\right)^{\gamma\lambda} (a_{\gamma} - a_{\gamma}^{\gamma}) = (1-\beta)(p_{\gamma} - q_{\gamma}),$$

لذا از رابطه (۲۹) به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} a_{\gamma} &= \frac{(1-\beta)(p_{\gamma} - q_{\gamma})}{\gamma(\gamma+1)^{\gamma} \left(\frac{a}{a+1}\right)^{\gamma\lambda}} + a_{\gamma}^{\gamma} \\ &= \frac{(1-\beta)(p_{\gamma} - q_{\gamma})}{\gamma(\gamma+1)^{\gamma} \left(\frac{a}{a+1}\right)^{\gamma\lambda}} + \frac{(1-\beta)^{\gamma} (p_{\gamma}^{\gamma} + q_{\gamma}^{\gamma})}{\gamma(\gamma+1)^{\gamma} \left(\frac{a}{a+1}\right)^{\gamma\lambda}}. \end{aligned}$$

حال با بکارگیری دوباره

لم ۱، رابطه (۲۱) حاصل می‌شود و این حکم را اثبات

می‌کند. \square

آنگاه

$$|a_{\gamma}| \leq \frac{\sqrt{1-\beta}}{\sqrt{\gamma(\gamma+1)^{\gamma} \left(\frac{a}{a+1}\right)^{\gamma\lambda} - (\gamma+1)^{\gamma} \left(\frac{a}{a+1}\right)^{\gamma\lambda}}}, \quad (20)$$

و

$$|a_{\gamma}| \leq \frac{(1-\beta)}{\gamma(\gamma+1)^{\gamma} \left(\frac{a}{a+1}\right)^{\gamma\lambda}} + \frac{\gamma(1-\beta)^{\gamma}}{(\gamma+1)^{\gamma} \left(\frac{a}{a+1}\right)^{\gamma\lambda}}. \quad (21)$$

برهان. فرض کنید $f \in H_{\Sigma}(\gamma, \beta, \lambda)$ و $g = f^{-1}$ از

روابط (۱۸) و (۱۹) به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \frac{z(L_a^{\lambda} f(z))' + \gamma z^{\gamma} (L_a^{\lambda} f(z))^{\gamma}}{(1-\gamma)L_a^{\lambda} f(z) + \gamma z(L_a^{\lambda} f(z))'} & \\ &= \beta + (1-\beta)p(z), \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \frac{w(L_a^{\lambda} g(w))' + \gamma w^{\gamma} (L_a^{\lambda} g(w))^{\gamma}}{(1-\gamma)L_a^{\lambda} g(w) + \gamma w(L_a^{\lambda} g(w))'} & \\ &= \beta + (1-\beta)q(w), \end{aligned} \quad (23)$$

که در آن توابع $p(z)$ و $q(w)$ به ترتیب به فرم (۹) و

(۱۰) می‌باشند. با مساوی قرار دادن ضرایب روابط (۲۲)

و (۲۳) داریم:

$$(\gamma+1)^{\gamma} \left(\frac{a}{a+1}\right)^{\gamma\lambda} a_{\gamma} = (1-\beta)p_{\gamma}, \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \gamma(\gamma+1)^{\gamma} \left(\frac{a}{a+1}\right)^{\gamma\lambda} a_{\gamma} - (\gamma+1)^{\gamma} \left(\frac{a}{a+1}\right)^{\gamma\lambda} a_{\gamma}^{\gamma} & \\ &= (1-\beta)p_{\gamma}, \end{aligned} \quad (25)$$

$$-(\gamma+1)^{\gamma} \left(\frac{a}{a+1}\right)^{\gamma\lambda} a_{\gamma} = (1-\beta)q_{\gamma}, \quad (26)$$

$$\gamma(\gamma+1)^{\gamma} \left(\frac{a}{a+1}\right)^{\gamma\lambda} (\gamma a_{\gamma}^{\gamma} - a_{\gamma}) \quad (27)$$

$$-(\gamma+1)^{\gamma} \left(\frac{a}{a+1}\right)^{\gamma\lambda} a_{\gamma}^{\gamma} = (1-\beta)q_{\gamma}.$$

References

[1] Y. Komatu, On analytic prolongation of a family of operators, *Mathematica (cluj)*, 32 (1990) 141-145.

[2] R.M. Ali, S.K. Lee, V. Ravichandran, S. Supramaniam, Coefficient estimates for bi-univalent Ma-Minda starlike and convex functions, *Appl. Math. Lett.*, 25 (2012) 344-351.

- [3] T.M. Flett, The dual of an inequality of Hardy and Littlewood and some related inequalities, *J. Math. Anal. Appl.*, 38 (1972) 746-765.
- [4] G.S. Salagean, Subclasses of univalent functions, in: *Complex Analysis-Fifth Romanian-Finnish Seminar*, Springer, 1983, pp. 362-372.
- [5] B.A. Uralegaddi, C. Somanatha, Certain classes of univalent functions, in: *Current topics in analytic function theory*, World Scientific, 1992, pp. 371-374.
- [6] I.B. Jung, Y.C. Kim, H.M. Srivastava, The Hardy space of analytic functions associated with certain one-parameter families of integral operators, *J. Math. Anal. Appl.*, 176 (1993) 138-147.
- [7] M. Lewin, On a coefficient problem for bi-univalent functions, *Proc. Am. Math. Soc.*, 18 (1967) 63-68.
- [8] D.A. Brannan, J.G. Clunie, *Aspects of Contemporary Complex Analysis* (Proceedings of the NATO Advanced Study Institute held at the University of Durham, Durham; July 1–20, 1979), in: Academic Press, New York and London, 1980.
- [9] E. Netanyahu, The minimal distance of the image boundary from the origin and the second coefficient of a univalent function in $|z| < 1$, *Archive Rational Mech. Anal.*, 32 (1969) 100-112.
- [10] D.A. Brannan, T.S. Taha, On some classes of bi-univalent functions, in: *Math. Anal. Appl.*, Elsevier, 1988, pp. 53-60.
- [11] B.A. Frasin, M.K. Aouf, New subclasses of bi-univalent functions, *Appl. Math. Lett.*, 24 (2011) 1569-1573.
- [12] Q.-H. Xu, Y.-C. Gui, H.M. Srivastava, Coefficient estimates for a certain subclass of analytic and bi-univalent functions, *Appl. Math. Lett.*, 25 (2012) 990-994.