

ORIGINAL ARTICLE

# Quantum Entanglement and Nonclassical Properties of Three Two-Level Atoms Interacting with a Single-Mode Field in the Presence of Intensity-Dependent Coupling

Firouz Langarizadeh<sup>1,2</sup>, Mohammad Javad Faghihi<sup>3\*</sup>, Hamid Reza Baghshahi<sup>4</sup>

1 Ph.D. Student, Department of Photonics, Graduate University of Advanced Technology, Kerman, Iran.

2 Instructor, Department of Mathematics, University of Jiroft, Jiroft, Iran.

3 Associate Professor, Department of Photonics, Graduate University of Advanced Technology, Kerman, Iran.

4 Associate Professor, Department of Physics, Vali-e-Asr University of Rafsanjan, Rafsanjan, Iran.

**Correspondence**

Mohammad Javad Faghihi  
Email: [mj.faghihi@kgut.ac.ir](mailto:mj.faghihi@kgut.ac.ir)

**How to cite**

Langarizadeh, F. Faghihi, M.J. Baghshahi, H.R (2024). Quantum Entanglement and Nonclassical Properties of Three Two-Level Atoms Interacting with a Single-Mode Field in the Presence of Intensity-Dependent Coupling, Optoelectronic, 6(2), 37-46.

**ABSTRACT**

This paper describes the interaction of three two-level atoms with a single-mode quantized field in the intensity-dependent coupling regime. Under a choice for initial conditions for the subsystems, where the atoms are prepared in an excited state and the cavity field is in the standard coherent state, the explicit form of the total system's state vector is obtained. To achieve this goal, the Laplace transform technique is employed. By considering the intensity-dependent and constant coupling regimes, some of the most important physical properties of the system such as quantum entanglement between the atomic and the radiation field subsystem, atomic population inversion, quantum statistics of field photons, and quadrature squeezing are numerically investigated. The numerical results show that the presence of nonlinear function can affect in the depth and the domain of the system's nonclassical behavior. Also, selecting different nonlinearity functions corresponding to any nonlinear oscillator with arbitrary nonlinear function, or corresponding to any solvable quantum system with a known discrete spectrum, the presented formalism would clearly be distinguished.

**KEYWORDS**

Three-Atom Jaynes-Cummings Model, Intensity-Dependent Coupling, Entanglement, Nonclassical Property, Collapse and Revival.

فصلنامه علمی  
اپتوالکترونیک

«مقاله پژوهشی»

## درهم‌تنیدگی کوانتومی و ویژگی‌های غیر کلاسیکی سه اتم دوترازی در برهم‌کنش با یک میدان تک‌مد در حضور جفت‌شدگی وابسته به شدت

فیروز لنگری‌زاده<sup>1,2</sup>، محمدجواد فقیهی<sup>3\*</sup>، حمیدرضا باغشاهی<sup>4</sup>

### چکیده

این مقاله به توصیف برهم‌کنش سه اتم دوترازی با یک میدان کوانتیده تک‌مد در رژیم جفت‌شدگی وابسته به شدت می‌پردازد. تحت یک انتخاب برای شرایط اولیه زیرسامانه‌ها که در آن اتم‌ها در حالت برانگیخته آماده‌سازی می‌شوند و میدان کاواک در حالت هم‌دوس استاندارد است، شکل صریح بردار حالت کل سامانه به دست خواهد آمد. برای نیل به این مهم، از روش تبدیل لاپلاس استفاده می‌شود. با در نظر گرفتن رژیم‌های جفت‌شدگی ثابت و وابسته به شدت، برخی از مهم‌ترین ویژگی‌های فیزیکی سامانه مانند درهم‌تنیدگی کوانتومی بین زیرسامانه اتمی و زیرسامانه تابشی، و ارونی جمعیت اتمی، آمار کوانتومی فوتون‌های میدان و چلانندگی به صورت عددی بررسی می‌شوند. نتایج عددی نشان می‌دهند که وجود تابع غیرخطی در عمق و دامنه غیر کلاسیکی بودن سامانه مؤثر است. همچنین، با انتخاب تابع‌های غیرخطی مختلف متناظر با هر نوسانگر غیرخطی با تابع غیرخطی دل‌خواه یا متناظر با هر سامانه کوانتومی حل‌پذیر با طیف مشخص، گستردگی مدل حاضر بیش از پیش روشن می‌گردد.

### واژه‌های کلیدی

مدل جینز-کامینگز سه‌اتمی، جفت‌شدگی وابسته به شدت، درهم‌تنیدگی، ویژگی غیر کلاسیکی، فروافت و بازیافت.

- 1 دانشجوی دکتری، گروه فوتونیک، دانشگاه تحصیلات تکمیلی صنعتی و فناوری پیشرفته، کرمان، ایران.
- 2 مربی، گروه ریاضی، دانشگاه جیرفت، جیرفت، ایران.
- 3 دانشیار، گروه فوتونیک، دانشگاه تحصیلات تکمیلی صنعتی و فناوری پیشرفته، کرمان، ایران.
- 4 دانشیار، گروه فیزیک، دانشگاه ولی‌عصر(عج) رفسنجان، رفسنجان، ایران.

نویسنده مسئول:

محمدجواد فقیهی

رایانامه: mj.faghghi@kgut.ac.ir

استناد به این مقاله:

فیروز لنگری‌زاده، محمدجواد فقیهی، حمیدرضا باغشاهی (1402). درهم‌تنیدگی کوانتومی و ویژگی‌های غیر کلاسیکی سه اتم دوترازی در برهم‌کنش با یک میدان تک‌مد در حضور جفت‌شدگی وابسته به شدت. فصلنامه علمی اپتوالکترونیک، 6(2)، 37-46.

## مقدمه

پدیده درهم‌تنیدگی کوانتومی نه تنها به این دلیل که نظریه کلاسیک را از نظریه کوانتومی متمایز می‌کند حائز اهمیت است، بلکه از آن به‌عنوان نقطه عطفی در پیشرفت‌های مرتبط با پردازش اطلاعات کوانتومی یاد می‌شود [1]. امروزه این پدیده در شاخه‌های مختلف این حوزه علم که برای مثال محاسبات کوانتومی [2]، دوربری کوانتومی [3]، کدگذاری چگال کوانتومی [4] و رمزنگاری کوانتومی [5] را در بر می‌گیرد، کاربرد دارد. در حوزه اپتیک کوانتومی، برهم‌کنش اتم با میدان تابشی کوانتیده که در یک کاواک اپتیکی صورت می‌پذیرد باعث ایجاد یک درهم‌تنیدگی بین این دو زیرسامانه (اتم و میدان) می‌شود. به بیان ریاضی بدین معنا است که در هر لحظه دلخواه نمی‌توان حالت کل سامانه اتم-میدان را به‌صورت حاصل‌ضرب تانسوری حالت اتم در حالت میدان نوشت [6]. برای تعیین مقدار درهم‌تنیدگی، ابتدا باید به خالص یا آمیخته بودن حالت درهم‌تنیده بررسی‌شده توجه کرد. اگر حالت درهم‌تنیده خالص باشد، آنتروپی فون نویمان، آنتروپی خطی و تنیدگی، معیارهای مناسبی برای محاسبه میزان درهم‌تنیدگی بین زیرسامانه‌ها هستند [7].

از طرفی، نشان داده شده است که حالت‌های غیرکلاسیکی میدان تابشی نقش بسزایی را در زمینه‌های مختلف پژوهشی مانند اپتیک کوانتومی، رمزنگاری کوانتومی و ارتباطات کوانتومی ایفا می‌کنند [8-10]. بنابراین با توجه به اهمیت این حالت‌ها در فناوری‌های جدید، معرفی سامانه‌های کوانتومی که از خود ویژگی‌های غیرکلاسیکی بروز می‌دهند در خور توجه است. در این زمینه، یکی از مهم‌ترین سامانه‌هایی که به تولید حالت‌های غیرکلاسیکی منجر می‌شود سامانه‌های برهم‌کنشی اتم-میدان در یک کاواک است [11-13]، که توصیف کوانتومی آن‌ها به‌طور عمومی با مدل جینز-کامینگز و تعمیم‌های آن صورت می‌پذیرد [14-16]. این مدل یکی از شناخته‌شده‌ترین مدل‌ها در اپتیک کوانتومی است که به مطالعه برهم‌کنش بین دو سامانه کوانتومی غیرمشابه می‌پردازد: یک سامانه دوترازی مانند اتم یا کیوبیت و یک حالت بوزونی مانند مد اپتیکی یا میکروویو.

مدل جینز-کامینگز یک مدل تحلیلی کاملاً کوانتومی از ساده‌ترین نوع برهم‌کنش بین اتم و میدان است. در این سامانه، یک اتم دوترازی با یک میدان کوانتیده تک‌مد تحت تقریب موج چرخان جفت می‌شود. سادگی این مدل باعث شده است که کاربردهای گسترده‌ای در زمینه اپتیک کوانتومی و پردازش اطلاعات کوانتومی داشته باشد. برای مثال می‌توان به کاربرد

این مدل در تولید حالت‌های  $EPR$ ،  $W$  و  $GHZ$  [17] و در سامانه‌های یون به‌دام‌افتاده [18] اشاره کرد. علاوه بر این، با توجه به این‌که این مدل به‌درستی دینامیک سامانه‌های فیزیکی گوناگونی را از اپتیک کوانتومی گرفته تا فیزیک ماده چگال توصیف می‌کند، مدل جینز-کامینگز جهش قابل‌توجهی را در مطالعات نظری و تجربی ایجاد کرده است.

تلاش‌های متعددی به‌منظور گسترش و توسعه این مدل صورت پذیرفته است. با توجه به موضوع مورد نظر ما، از میان آن‌ها می‌توان به در نظر گرفتن سامانه‌های چنداتمی و جفت‌شدگی وابسته به شدت اشاره کرد. استفاده از سامانه‌های چنداتمی از این نظر ویژه است که در مباحث مرتبط با پردازش اطلاعات کوانتومی سامانه‌های با بُعد - فضای هیلبرت - بیشتر ارجح هستند. برای نمونه در موضوع رمزنگاری کوانتومی، نشان داده شده است که امنیت سامانه‌هایی با بُعد فضای هیلبرت بزرگ‌تر از دو بهتر از سامانه‌های دوتایی است [19]. به‌عنوان مثالی دیگر، با تعمیم سامانه‌های کوانتومی درهم‌تنیده دوبعدی (کیوبیت) به  $N$  بُعدی (کیونیت)، ثابت شده است که با توجه به نامساوی بل، غیرموضعی بودن کوانتومی دو کیونیت که به‌طور حداکثری درهم‌تنیده هستند قوی‌تر از دو کیوبیت است [20]؛ موضوعی که قضیه گریبنرگر-هورن-سایلینگر نیز آن را تأیید می‌کند [21].

از سوی دیگر، در سامانه‌های برهم‌کنشی اتم-میدان، ایده جفت‌شدگی وابسته به شدت ریشه در مفهوم حالت‌های همدوس غیرخطی دارد که این حالت‌ها به یک بیان تعمیم حالت‌های همدوس استاندارد (متناظر با نوسانگر هماهنگ کوانتومی) به حالت‌های همدوس تعمیم‌یافته (مرتبط با نوسانگر غیرخطی) است. حالت‌های همدوس غیرخطی توصیف کوانتومی یک میدان تابشی است که بسامد آن به شدت نور وابسته است. به‌عنوان یک مورد فیزیکی از این حالت‌ها که در آن به بستگی بسامد به شدت نور اشاره دارد، می‌توان پدیده جابه‌جایی به سمت آبی را نام برد [22].

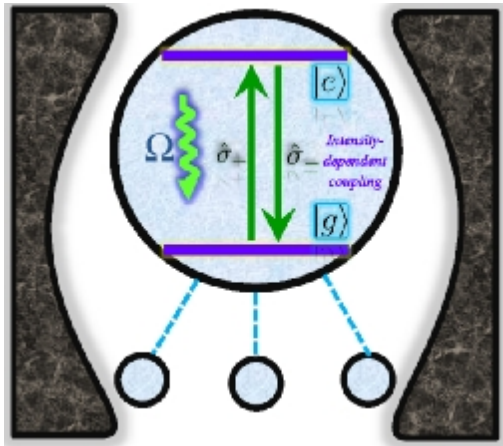
با این پیش‌زمینه، مدل جینز-کامینگز وابسته به شدت را می‌توان تلفیقی منطقی از مدل جینز-کامینگز استاندارد و حالت‌های همدوس غیرخطی پنداشت. به عبارت دیگر، تعمیم مدل جینز-کامینگز استاندارد به همتای غیرخطی خود بدین شکل رقم می‌خورد که عملگرهای بوزونی میدان تابشی با عملگرهای تغییرشکل‌یافته جایگزین می‌شوند. در واقع، جبر کوانتومی این اجازه را می‌دهد که عملگرهای بوزونی نوسانگر کوانتومی مرسوم با عملگرهای متناظر با نوسانگر تغییرشکل‌یافته جایگزین شوند [23-26]. لازم به ذکر است که

رژیم‌های جفت‌شدگی ثابت و وابسته به شدت با یکدیگر مقایسه می‌شوند.

آنچه در ادامه می‌آید بدین شرح خواهد بود. در بخش بعد، پس از معرفی سامانه برهم‌کنشی مورد نظر از طریق هامیلتونی آن، بردار حالت کل سامانه به صورت تحلیلی به دست می‌آید. به دنبال آن، تحلیل دینامیک درهم‌تنیدگی اتم‌ها با میدان با استفاده از سنجه تنیدگی مدنظر خواهد بود. سپس، رفتار زمانی ویژگی‌های غیرکلاسیکی سامانه به کمک وارونی جمعیت اتمی، پارامتر مندل و چلاندرگی بررسی می‌شود. بخش پایانی نیز به ارائه خلاصه‌ای از مقاله به همراه نکات کلیدی آن اختصاص دارد.

### توصیف سامانه و فرمول‌بندی نظری آن

اطلاعات فیزیکی یک سامانه کوانتومی بسته به طور عمومی از بردار حالت آن استخراج می‌شود که یافتن شکل صریح بردار حالت سامانه به نوبه خود مستلزم آگاهی از برهم‌کنش‌هایی است که در آن سامانه رخ می‌دهد. در این بخش، یک سامانه فیزیکی معرفی می‌شود که شامل سه اتم دوترازی است که با یک میدان تابشی کوانتیده تک‌مد که در بسامد  $W$  نوسان می‌کند در حضور جفت‌شدگی وابسته به شدت برهم‌کنش می‌کند (شکل 1).



شکل 1. نمایی از جفت‌شدگی وابسته به شدت سه اتم دوترازی با یک میدان تک‌مد در یک کاواک اپتیکی

بدین ترتیب، هامیلتونی سامانه در تقریب‌های دوقطبی الکتریکی و موج چرخان به صورت زیر خواهد بود

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_1 \quad (1)$$

که در آن

کاربردهای متعددی از نوسانگرهای غیرخطی مربوط به سامانه‌های فیزیکی گزارش شده است [27-31]. به هر ترتیب، به این دلیل که حالت‌های همدوس غیرخطی کاندیدای مناسبی برای تولید حالت‌های غیرکلاسیکی هستند، مدل جینز-کامینگز با جفت‌شدگی وابسته به شدت در خور توجه است. این اهمیت دوچندان خواهد بود وقتی به این نکته اشاره شود که مدل جینز-کامینگز غیرخطی را می‌توان برای هر سامانه فیزیکی، اعم از هر نوسانگر غیرخطی با تابع غیرخطی دلخواه یا هر سامانه کوانتومی حل‌پذیر با طیف ویژه‌مقداری گسسته به کار برد. از میان آن‌ها می‌توان به نوسانگر آیزوتونیک [32]، طیف اتم هیدروژن-گونه [33]، پتانسیل پوشل-تیلر [34]، و حرکت مرکز جرم یون به دام‌افتاده [35] اشاره کرد.

از این رو که در مقاله حاضر از توابع غیرخطی  $\sqrt{n}$  و  $1/\sqrt{n}$  استفاده می‌شود، به نظر می‌رسد که پرداختن به آن‌ها در اینجا مفید خواهد بود. به لحاظ تاریخی تابع  $\sqrt{n}$  در ابتدا به طور نظری به مدل جینز-کامینگز وارد شد [36]. حدوداً سه دهه بعد، این تابع غیرخطی در یک مشاهده طیفی تأییدیه تجربی گرفت [37]. توضیح بیش‌تر این‌که در این آزمایش که در یک کاواک اپتیکی صورت پذیرفت، یک یا دو فوتون یک جفت‌شدگی قوی با یک اتم پیدا می‌کنند. پس از ارزیابی و مشاهده، نتایج طیفی حاصل از این آزمایش نشان دادند که تطابق بسیار خوبی با توصیف نظری پیشین وجود دارد، زمانی که مدل جینز-کامینگز غیرخطی با تابع غیرخطی  $\sqrt{n}$  و در پایه حالت‌های پوشیده در نظر گرفته می‌شود. همچنین در مورد تابع غیرخطی  $1/\sqrt{n}$  لازم به ذکر است که این تابع توسط مانکو و همکارانش (از جمله سودارشان) در زمره توابع غیرخطی قابل قبول برای ایجاد یک حالت همدوس غیرخطی قرار گرفت [24] که پیش از آن سودارشان حالت‌های همدوس متناظر با آن را حالت‌های هماهنگ نامیده بود [38].

با توجه به انگیزه‌ها و توضیحات ارائه‌شده، در این مقاله برهم‌کنش غیرخطی (وابسته به شدت) بین سه اتم دوترازی یکسان، که در حالت برانگیخته آماده‌سازی می‌شوند، با میدان تک‌مد که در ابتدا در حالت همدوس استاندارد است بررسی می‌شود. پس از به دست آوردن بردار حالت کل سامانه، دینامیک ویژگی‌های کوانتومی آن ارزیابی می‌شود. بدین منظور، درهم‌تنیدگی کوانتومی بین اتم‌ها با میدان با استفاده از سنجه تنیدگی مطالعه می‌شود. سپس ویژگی‌های غیرکلاسیکی سامانه به بحث گذاشته می‌شود. در این راستا، وارونی جمعیت اتمی، آمار زیرپواسونی و چلاندرگی میدان تابشی مورد توجه خواهند بود. در هر مورد، دینامیک کمیت‌های فیزیکی یادشده در

برانگیخته وارد کاواک شوند و میدان نیز در حالت همدوس،  $|a \tilde{n}\rangle$  [45]، آماده‌سازی شود، حالت اولیه سامانه بدین شکل خواهد بود

$$|y(0)\rangle = |e, e, e\rangle |a\rangle = |e, e, e\rangle \hat{a}^{+\infty} |q_n\rangle |n\rangle \quad (5)$$

$$= \hat{a}^{+\infty} |q_n\rangle |e, e, e, n\rangle$$

که در آن

$$q_n = \exp\left(-|a|^2/2\right) \frac{a^n}{\sqrt{n!}} \quad (6)$$

خواهد بود. با فرض این که ثابت‌های جفت‌شدگی اتم‌ها با مد میدان نیز یکسان باشد؛ به عبارت دیگر اتم‌ها یکسان در نظر گرفته شوند، بردار حالت کل سامانه در هر زمان دلخواه  $t > 0$  به صورت زیر به دست می‌آید

$$|y(t)\rangle = \hat{a}^{+\infty} |q_n\rangle \hat{U}(n, t) |e, e, e, n\rangle$$

$$+ B(n+1, t) (|g, e, e, n+1\rangle + |e, g, e, n+1\rangle)$$

$$+ |e, e, g, n+1\rangle + C(n+2, t) (|g, g, e, n+2\rangle$$

$$+ |g, e, g, n+2\rangle + |e, g, g, n+2\rangle)$$

$$+ D(n+3, t) |g, g, g, n+3\rangle \quad (7)$$

در این رابطه،  $C(n+2, t)$ ،  $B(n+1, t)$ ،  $A(n, t)$  و  $D(n+3, t)$  دامنه‌های احتمال هستند که باید به کمک رابطه (3) و استفاده از رابطه (4) محاسبه شوند. در این صورت، معادله‌های دیفرانسیل جفت‌شده زیر حاصل می‌شوند

$$i\dot{A}(n, t) = 3V_1 B(n+1, t) \quad (8الف)$$

$$i\dot{B}(n+1, t) = V_1 A(n, t) + 2V_2 C(n+2, t) \quad (8ب)$$

$$i\dot{C}(n+2, t) = V_3 D(n+3, t) + 2V_2 B(n+1, t) \quad (8ج)$$

$$i\dot{D}(n+3, t) = 3V_3 C(n+2, t) \quad (8د)$$

که در آن خواهیم داشت

$$V_k = g f(n+k) \sqrt{n+k} \quad (9)$$

در میان روش‌های مختلفی که برای حل معادلات (8الف) وجود دارد، تبدیل لاپلاس روشی است که معادلات دیفرانسیل جفت‌شده (8الف) - (8د) را به مجموعه‌ای از معادلات جبری کاهش می‌دهد. سپس تبدیل لاپلاس معکوس انجام می‌شود تا دامنه‌های احتمال محاسبه شوند [46]. بدین ترتیب، پس از انجام محاسبات طولانی، دامنه‌های احتمال از طریق تکنیک‌های تبدیل لاپلاس معکوس به صورت زیر به دست می‌آیند

$$\hat{H}_0 = \frac{1}{2} \hat{a}^{\dagger 3} w_k \hat{s}_z^{(k)} + W \hat{a}^{\dagger} \hat{a} \quad (2)$$

$$\hat{H}_I = \hat{a}^{\dagger 3} g_k \left( \hat{s}_+^{(k)} \hat{A} + \hat{A}^{\dagger} \hat{s}_-^{(k)} \right)$$

در این روابط، عملگرهای هرمیتی  $\hat{H}_0$  و  $\hat{H}_I$  به ترتیب به هامیلتونی زیرسامانه‌ها و برهم‌کنش بین آن‌ها اشاره دارند. همچنین، عملگر  $\hat{s}_z^{(k)}$  با رابطه  $\hat{s}_z^{(k)} = \hat{s}_+^{(k)} \hat{s}_-^{(k)} - \hat{s}_-^{(k)} \hat{s}_+^{(k)}$  بیان‌گر عملگر وارونی جمعیت اتمی است که در آن  $|\tilde{n} a g^{(k)}\rangle = e^{(k)} \tilde{n} a g^{(k)}$  و  $\hat{s}_+^{(k)} = \hat{s}_+^{(k)\dagger}$  عملگرهای بالابرنده و پایین‌برنده متناظر با هر اتم هستند. ثابت  $g_k$  نیز قدرت جفت‌شدگی اتم را با مد میدان نشان می‌دهد. در نهایت، بستگی جفت‌شدگی اتم-میدان به شدت از طریق عملگرهای تغییرشکل‌یافته بوزونی به صورت  $\hat{A} = \hat{a} \hat{f}(\hat{n})$  و  $\hat{A}^{\dagger} = \hat{f}(\hat{n}) \hat{a}^{\dagger}$  [39-41] به هامیلتونی وارد شده که در آن  $\hat{f}(\hat{n})$  یک تابع عملگر-مقدار وابسته به شدت است. لازم به ذکر است که در این روابط،  $\hat{a}$  و  $\hat{a}^{\dagger}$  به ترتیب عملگرهای نابودی و آفرینش بوزونی را نشان می‌دهند.

ذکر این نکته آموزنده است که در بسیاری از سامانه‌های برهم‌کنشی کوانتومی اتم-میدان، اثرات میرایی مانند فروپاشی اتمی از حالت برانگیخته به حالت پایین‌تر یا واپاشی میدان تابشی در یک کاواک غیرقابل چشم‌پوشی هستند. در مدل حاضر، به دلیل وجود تابع غیرخطی وابسته به شدت، به دست آوردن عملگر ماتریس چگالی کاهش‌یافته میدان به منظور وارد کردن اثرات اتلافی با استفاده از روش متعارف (معادله اصلی) دشوار است. با این وجود، اگر بتوان شرایطی را رقم زد که نسبت ثابت جفت‌شدگی به ضرایب متناظر با گسیل خودبه‌خودی و نشت فوتونی بسیار بزرگ‌تر از واحد باشد، می‌توان اثرات اتلافی را نادیده گرفت. این شرایط با نام رژیم جفت‌شدگی قوی شناخته می‌شوند که در این خصوص مقاله‌های تجربی متعددی نیز گزارش شده است [42-44].

به منظور یافتن بردار حالت کل سامانه، معادله شرودینگر وابسته به زمان در تصویر برهم‌کنش به صورت

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |y(t)\tilde{n}\rangle = \hat{H}_I |y(t)\tilde{n}\rangle \quad (3)$$

دنبال می‌شود که در آن  $\hat{H}_I$ ، نشان‌دهنده هامیلتونی کل سامانه در تصویر برهم‌کنش و در حالت تشدید، با رابطه زیر داده می‌شود

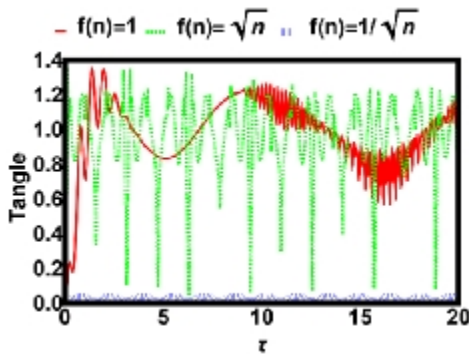
$$\hat{H}_I = \hat{a}^{\dagger 3} g_k \left( \hat{s}_+^{(k)} \hat{A} + \hat{A}^{\dagger} \hat{s}_-^{(k)} \right) \quad (4)$$

با در نظر گرفتن این که در ابتدا هر سه اتم در حالت

حالت‌های جداپذیر و غیردرهم‌تنیده تا مقدار  $2(M-1)/M$  برای حالت‌هایی با بیشینه مقدار درهم‌تنیدگی خواهد بود که در آن  $M$  بعد کمینه بین بُدهای دو زیرسامانه 1 و 2 است؛  $M = \min(D_1, D_2)$  با این توضیح، سنجه تنیدگی برای سامانه برهم‌کنشی حاضر که متشکل از زیرسامانه اتمی با بعد 8 و زیرسامانه تابشی با بعد نامتناهی است با رابطه زیر بیان می‌شود

$$t(y_{AF}) = 2\langle \hat{r}_A^2 \rangle - \text{Tr}(\hat{r}_A^2) \quad (13)$$

در این رابطه که معرف میزان درهم‌تنیدگی بین سه اتم دوترازی با میدان تک‌مد است،  $\hat{r}_A$  نشان‌دهنده عملگر ماتریس چگالی کاهش‌یافته اتم‌ها است.



شکل 2. دینامیک درهم‌تنیدگی بین اتم‌ها با مُد میدان به‌ازای زمان مشخصه  $t = gt$  در دو رژیم جفت‌شدگی ثابت و وابسته به شدت.

شکل 2 به بررسی تغییرات زمانی درهم‌تنیدگی کوانتومی ناشی از برهم‌کنش بین اتم‌ها با میدان تابشی تک‌مد برحسب زمان مشخصه  $t = gt$  می‌پردازد که در آن تأثیر جفت‌شدگی‌های ثابت (نمودار قرمز رنگ توپر،  $f(n)=1$ ) و وابسته به شدت (نمودار سبز رنگ خط‌چین،  $f(n)=\sqrt{n}$ )، نمودار آبی رنگ نقطه‌چین،  $f(n)=1/\sqrt{n}$ ) نیز مورد مطالعه قرار می‌گیرد. این شکل نشان می‌دهد که با شروع برهم‌کنش، درهم‌تنیدگی بین اتم‌ها با میدان ایجاد می‌شود و در گذر زمان این درهم‌تنیدگی با مقادیر کمی تفاوت وجود دارد. در عوض، در رژیم جفت‌شدگی وابسته به شدت به‌ازای تابع غیرخطی  $\sqrt{n}$  مقدار درهم‌تنیدگی می‌تواند در بازه‌هایی از زمان نسبت به رژیم جفت‌شدگی ثابت بیش‌تر باشد، اگرچه این رفتار نسبتاً دوره‌ای است و در لحظات خاصی از زمان، زیرسامانه اتمی با زیرسامانه تابشی غیردرهم‌تنیده و جداپذیر می‌شوند. هم‌چنین مقدار درهم‌تنیدگی به‌ازای تابع غیرخطی  $1/\sqrt{n}$  متناوب و با مقدار کمی ناچیز ادامه می‌یابد.

$$A(n, t) = \frac{(g - a_2 + 6V_1^2) \cos(b_1 t)}{2g} + \frac{(g + a_2 - 6V_1^2) \cos(b_2 t)}{2g} \quad (10\text{الف})$$

$$B(n+1, t) = i \frac{b_2(a_1 - 3V_1^2 b_1^2) \sin(b_1 t)}{3gV_1 b_1 b_2} + i \frac{b_1(-a_1 + 3V_1^2 b_2^2) \sin(b_2 t)}{3gV_1 b_1 b_2} \quad (10\text{ب})$$

$$C(n+2, t) = \frac{a_3 (\cos(b_1 t) - \cos(b_2 t))}{3gV_3} \quad (10\text{ج})$$

$$D(n+3, t) = \frac{-ia_3 (b_2 \sin(b_1 t) - b_1 \sin(b_2 t))}{\phi_1 b_2} \quad (10\text{د})$$

که در آن کمیت‌های زیر مفروض است

$$a_1 = 9V_1^2 V_3^2, \quad a_2 = 3(V_1^2 + V_3^2) + 4V_2^2$$

$$a_3 = 6V_1 V_2 V_3, \quad g = \sqrt{a_2^2 - 4a_1} \quad (11)$$

$$b_1 = \sqrt{\frac{a_2 + g}{2}}, \quad b_2 = \sqrt{\frac{a_2 - g}{2}}$$

بدین ترتیب شکل صریح بردار حالت سامانه در رابطه (7)

به‌دست می‌آید و در نتیجه می‌توان ویژگی‌های غیرکلاسیکی سامانه را بررسی کرد.

### درهم‌تنیدگی کوانتومی

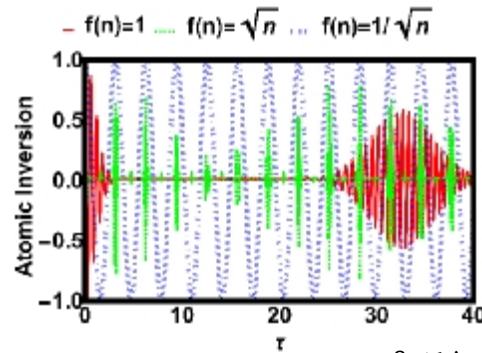
در این بخش، میزان درهم‌تنیدگی بین زیرسامانه اتمی با زیرسامانه میدان تابشی به کمک سنجه مفید تنیدگی محاسبه می‌شود. تنیدگی یک سنجه مناسب برای ارزیابی درهم‌تنیدگی است که هم‌بستگی بین زیرسامانه‌های یک سامانه کوانتومی چندبخشی را توصیف می‌کند. در ابتدا، این سنجه بر حسب سنجه تالاقی برای دو کیوبیت تعریف شد [47]. سپس آن تعریف به منظور دستیابی به یک تابع تحلیلی از میزان درهم‌تنیدگی به تنیدگی تغییر یافت که از آن برای یک سامانه دویخشی در حالت خالص  $|y\rangle_{12}$  با ابعاد دلخواه  $D_1, D_2$  استفاده شد [48]. بر این اساس، تنیدگی به شکل زیر تعریف می‌شود

$$t(y_{12}) = 2n_{D_1} n_{D_2} \langle \hat{r}_1^2 \rangle - \text{Tr}(\hat{r}_1^2) \quad (12)$$

که در آن  $\hat{r}_1$  عملگر ماتریس چگالی کاهش‌یافته زیرسامانه 1 است. هم‌چنین،  $n_{D_1}$  و  $n_{D_2}$  ثابت‌های دلخواهی هستند که به‌طور کلی به ابعاد زیرسامانه‌های 1 و 2 بستگی دارند. برای هم‌خوانی با مقدار درهم‌تنیدگی برای یک سامانه دوتایی (دوکیوبیتی)، مقدار این ثابت‌ها برابر واحد است. در این صورت، گستره تغییرات این سنجه از مقدار صفر برای

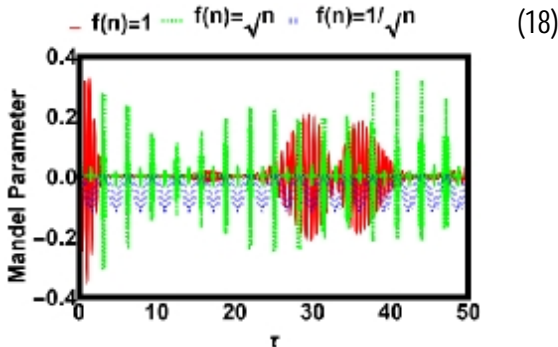
ویژگی های غیر کلاسیکی

زمان مشخصه  $t$  در رژیم های جفت شدگی ثابت و وابسته به شدت ترسیم شده است. در این شکل، نوسانات وارونی جمعیت اتمی به ویژه در رژیم جفت شدگی وابسته به شدت دیده می شود. همچنین، پدیده فروافت و بازیافت به عنوان یک پدیده کوانتومی محض، در هر دو رژیم به روشنی مشاهده می شود. به علاوه، تغییرات زمانی وارونی جمعیت اتمی بین مقدار کمینه و بیشینه در رژیم جفت شدگی وابسته به شدت با تابع غیرخطی  $1/\sqrt{n}$  به صورت متناوب و نوسانی کاملاً مشهود است.



شکل 3. تغییرات زمانی وارونی جمعیت اتمی در دو رژیم جفت شدگی ثابت و وابسته به شدت.

**پارامتر مندل:** غیر کلاسیکی بودن زیرسامانه کوانتومی تابشی مورد مطالعه با استفاده از آمار فوتون های میدان توسط پارامتر مندل ارزیابی می شود که با رابطه زیر نشان داده می شود [50]



شکل 4. تغییرات زمانی پارامتر مندل در دو رژیم جفت شدگی ثابت و وابسته به شدت.

$$Q_M = \frac{\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle^2 - \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle}{\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle} - 1 \quad (18)$$

با توجه به این پارامتر، مقدار  $Q = 0$  نشان دهنده آمار پواسونی است که به حالت هم دوس استاندارد مربوط می شود. همچنین،  $Q > 0$  معرف نور کلاسیکی و آمار فراپواسونی است و در آخر، نامساوی  $Q < 0$  به آمار زیرپواسونی و رفتار غیر کلاسیکی یک میدان تابشی اشاره دارد.

نتایج عددی شکل 4 نشان دهنده تغییرات زمانی آمار فوتون های میدان در دو رژیم جفت شدگی است. عمق غیر کلاسیکی بودن سامانه در رژیم جفت شدگی وابسته به شدت بیشتر است و در نتیجه آمار زیرپواسونی در این رژیم مشهودتر است؛ اگرچه سامانه در هر دو رژیم جفت شدگی غیر کلاسیکی است. پدیده کاملاً کوانتومی فروافت و بازیافت از دیگر نتایجی است که از شکل 4 استنباط می شود. لازم به ذکر است که آمار فوتون های میدان در رژیم جفت شدگی وابسته به شدت با تابع  $1/\sqrt{n}$  به صورت متناوب در ناحیه منفی اتفاق می افتد و زیرپواسونی است و به منزله آن است که زیرسامانه تابشی در

آنچه در ادامه می آید بررسی دینامیک ویژگی های غیر کلاسیکی سامانه برهم کنشی اتم-میدان مورد نظر است که با کمیت هایی همچون وارونی جمعیت اتمی، پارامتر مندل و چلانگی صورت می پذیرد.

وارونی جمعیت اتمی:

در این جا دینامیک رفتار اتم ها با استفاده از وارونگی جمعیت اتمی، که بیان گر تبادل انرژی بین اتم ها و میدان کاواک است، مطالعه می شود [49]. این کمیت معمولاً به صورت

$$W(t) = \text{Tr}(\hat{r}_A \hat{S}_z) \quad (14)$$

تعریف می شود که در آن  $\hat{S}_z$  با رابطه

$$\hat{S}_z = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^3 \hat{a} \hat{S}_z^{(k)} \quad (15)$$

بیان می گردد. بدین ترتیب، گستره تغییرات وارونی جمعیت اتمی برای زیرسامانه اتمی حاضر به صورت  $1 \leq W(t) \leq 1$  باقی می ماند. برای سامانه مورد بحث، وارونی جمعیت اتمی به صورت زیر

$$W(t) = r_{11} + r_{22} - r_{33} - r_{44} \quad (16)$$

است که در آن  $r_{kk}$  ها عناصر ماتریس چگالی کاهش یافته

اتمی هستند که با رابطه زیر داده می شوند

$$r_{11}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} q_n q_n^* A(n,t) A^*(n,t) \quad (الف) \quad (17)$$

$$r_{22}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} q_n q_n^* B(n+1,t) B^*(n+1,t) \quad (ب) \quad (17)$$

$$r_{33}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} q_n q_n^* C(n+2,t) C^*(n+2,t) \quad (ج) \quad (17)$$

$$r_{44}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} q_n q_n^* D(n+3,t) D^*(n+3,t) \quad (د) \quad (17)$$

در شکل 3، تحول زمانی وارونی جمعیت اتمی برحسب

از کوادراتورهای  $x$  یا  $y$  در برآورده شدن یکی از نامساوی‌های  $-1 \leq S_x < 0$  یا  $-1 \leq S_y < 0$  خلاصه می‌شود.

شکل 5 به مطالعه دینامیک چلانندگی سامانه در کوادراتور  $x$  می‌پردازد. بر این اساس، سامانه در لحظات آغازین برهم‌کنش برای رژیم جفت‌شدگی وابسته به شدت تابع  $\sqrt{n}$  چلاننده است درحالی‌که به‌ازای تابع غیرخطی  $1/\sqrt{n}$  سامانه در طول زمان تناوبی و چلاننده است و عمق آن نیز قابل ملاحظه است. در رژیم جفت‌شدگی ثابت نیز مشاهده می‌شود که سامانه در بازه‌های محدودی از زمان چلاننده است.

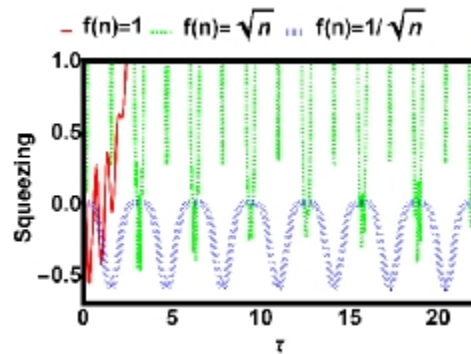
### خلاصه و نتیجه‌گیری

در این مقاله، توصیفی از سه اتم دوترازی در برهم‌کنش غیرخطی (وابسته به شدت) با یک میدان تک‌مد در یک کاواک اپتیکی ارائه شد. پس از یافتن شکل صریح بردار حالت سامانه برهم‌کنشی در نظر گرفته شده با استفاده از روش تبدیل لاپلاس، میزان درهم‌تنیدگی بین اتم‌ها با مُد میدان، وارونی جمعیت اتمی، آمار زیرپواسونی و چلانندگی کوادراتورهای میدان به‌صورت عددی بررسی شد. نتایج عددی حاصل از کمیت‌های فیزیکی یادشده عموماً شاهدی بر این بودند که جفت‌شدگی وابسته به شدت ویژگی‌های غیرکلاسیکی سامانه را در مقایسه با جفت‌شدگی ثابت تقویت می‌کند. اگرچه در مورد چلانندگی و آمار فوتون‌های میدان، سامانه در جفت‌شدگی وابسته به شدت به‌ازای تابع غیرخطی  $1/\sqrt{n}$  رفتار غیرکلاسیکی قابل توجهی دارد و سامانه در طول زمان برهم‌کنش غیرکلاسیکی باقی می‌ماند. در ارزیابی دینامیک وارونی جمعیت اتمی و آمار زیرپواسونی پدیده کاملاً کوانتومی فروافت و بازیافت در هر دو رژیم جفت‌شدگی ثابت و وابسته به شدت به‌روشنی مشاهده شد. در نتیجه، تحلیل عددی کمیت‌های فیزیکی یادشده در سامانه بررسی شده حاکی از آن است که این سامانه در هر دو رژیم جفت‌شدگی از خود رفتار غیرکلاسیکی نشان می‌دهد و حالت متناظر با آن یک حالت کوانتومی غیرکلاسیکی است. در پایان ذکر این نکته ارشمنند است که فرمول‌بندی حاضر را می‌توان برای هر نوسانگر غیرخطی با تابع غیرخطی دلخواه و همچنین هر سامانه کوانتومی حل‌پذیر با طیف گسسته مشخص به کار برد.

این حالت با استناد به پارامتر مندل در طول زمان غیرکلاسیکی است.

**چلانندگی:** حالت‌های چلاننده یکی از منابع کوانتومی مهم در پردازش اطلاعات کوانتومی متغیر پیوسته به شمار می‌روند و ارزیابی چلانندگی سامانه‌های تابشی حائز اهمیت هستند. به لحاظ معنایی، یک حالت تابشی چلاننده است هرگاه افت‌وخیزهای کوانتومی در یکی کوادراتورهای میدان برای آن حالت کمتر از حالت خلأ یا حالت هم‌دوس استاندارد باشد که طبیعتاً تحقق این امر به بهای افزایش افت‌وخیزها در کوادراتور دیگر است [51]. به زبان ریاضی و برای درک کمی این که یک حالت چلاننده است یا نه، کوادراتورهای میدان به‌صورت

$$\hat{x} = \frac{1}{2}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger), \quad \hat{y} = \frac{1}{2i}(\hat{a} - \hat{a}^\dagger) \quad (19)$$



شکل 5. تغییرات زمانی چلانندگی در کوادراتور  $x$  در دو رژیم جفت‌شدگی ثابت و وابسته به شدت.

معرفی می‌شوند که از رابطه جابه‌جایی  $[\hat{x}, \hat{y}] = i/2$  پیروی می‌کنند [52]. به دنبال آن، رابطه عدم قطعیت نیز برای این دو عملگر به‌صورت  $(D\hat{x})^2 (D\hat{y})^2 \geq 1/16$  به دست می‌آید. شرط چلانندگی زیرسامانه تابشی این است که یکی از روابط  $(D\hat{x})^2 < 1/4$  یا  $(D\hat{y})^2 < 1/4$  محقق شوند. این امر به نوبه خود پارامترهای چلانندگی را پدید می‌آورد که به‌صورت زیر تعریف می‌شوند [53]

$$S_x = 2\hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{n} + 2\hat{A}\hat{e}\hat{a}\hat{n}^2\hat{n} - 4(\hat{A}\hat{e}\hat{a}\hat{n})^2, \quad (20)$$

$$S_y = 2\hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{n} - 2\hat{A}\hat{e}\hat{a}\hat{n}^2\hat{n} - 4(\hat{A}\hat{m}\hat{a}\hat{n})^2$$

با توجه به این روابط، چلانندگی یک سامانه تابشی در یکی

### References

- [1] Nielsen, M. A., & Chuang, I. L. (2010). Quantum Computation and Quantum Information. Cambridge University Press.
- [2] Hou, Z., Tang, J. F., Huang, C. J., Huang, Y. F., Xiang, G. Y., Li, C. F., & Guo, G. C. (2023).

- Entangled-state time multiplexing for multiphoton entanglement generation. Physical Review Applied, 19(1), L011002.
- [3] Šupić, I., Skrzypczyk, P., & Cavalcanti, D. (2019). Methods to estimate entanglement in teleportation experiments. Physical Review A, 99(3), 032334.



- [4] Guo, Y., Liu, B. H., Li, C. F., & Guo, G. C. (2019). Advances in quantum dense coding. *Advanced Quantum Technologies*, 2(5-6), 1900011.
- [5] Yin, J., Li, Y. H., Liao, S. K., Yang, M., Cao, Y., Zhang, L., ... & Pan, J. W. (2020). Entanglement-based secure quantum cryptography over 1,120 kilometres. *Nature*, 582(7813), 501-505.
- [6] Audretsch, J. (2007). *Entangled Systems: New Directions in Quantum Physics*. John Wiley & Sons.
- [7] Baghshahi, H. R., & Tavassoly, M. K. (2015). Dynamics of different entanglement measures of two three-level atoms interacting nonlinearly with a single-mode field. *The European Physical Journal Plus*, 130, 1-13.
- [8] Lee, N., Benichi, H., Takeno, Y., Takeda, S., Webb, J., Huntington, E., & Furusawa, A. (2011). Teleportation of nonclassical wave packets of light. *Science*, 332(6027), 330-333.
- [9] Sergienko, A. V. (Ed.). (2018). *Quantum Communications and Cryptography*. CRC Press.
- [10] Prabhakar, S., Shields, T., Dada, A. C., Ebrahim, M., Taylor, G. G., Morozov, D., ... & Clerici, M. (2020). Two-photon quantum interference and entanglement at 2.1  $\mu\text{m}$ . *Science Advances*, 6(13), eaay5195.
- [11] Faghihi, M. J., & Tavassoly, M. K. (2013). Number-phase entropic squeezing and nonclassical properties of a three-level atom interacting with a two-mode field: intensity-dependent coupling, deformed Kerr medium, and detuning effects. *Journal of the Optical Society of America B*, 30(11), 2810-2818.
- [12] Ghorbani, M., Faghihi, M. J., & Safari, H. (2017). Wigner function and entanglement dynamics of a two-atom two-mode nonlinear Jaynes-Cummings model. *Journal of the Optical Society of America B*, 34(9), 1884-1893.
- [13] Ghasemian, E., & Tavassoly, M. K. (2018). Atom and field squeezed output of three-level atom laser surrounded by a Kerr medium in the electromagnetically induced transparency regime. *Journal of the Optical Society of America B*, 35(1), 86-94.
- [14] Shore, B. W., & Knight, P. L. (1993). The Jaynes-Cummings model. *Journal of Modern Optics*, 40(7), 1195-1238.
- [15] Ghorbani, M., Safari, H., & Faghihi, M. J. (2016). Controlling the entanglement of a  $\Lambda$ -type atom in a bimodal cavity via atomic motion. *Journal of the Optical Society of America B*, 33(6), 1022-1029.
- [16] Baghshahi, H. R., & Faghihi, M. J. (2022).  $f$ -deformed cavity mode coupled to a  $\Lambda$ -type atom in the presence of dissipation and Kerr nonlinearity. *Journal of the Optical Society of America B*, 39(11), 2925-2933.
- [17] Ghasemian, E., & Tavassoly, M. K. (2021). Generation of Werner-like states via a two-qubit system plunged in a thermal reservoir and their application in solving binary classification problems. *Scientific Reports*, 11(1), 3554.
- [18] Nadiki, M. H., Tavassoly, M. K., & Yazdanpanah, N. (2018). A trapped ion in an optomechanical system: entanglement dynamics. *The European Physical Journal D*, 72, 1-10.
- [19] Bruss, D., & Macchiavello, C. (2002). Optimal eavesdropping in cryptography with three-dimensional quantum states. *Physical Review Letters*, 88(12), 127901.
- [20] Clauser, J. F., Horne, M. A., Shimony, A., & Holt, R. A. (1969). Proposed experiment to test local hidden-variable theories. *Physical Review Letters*, 23(15), 880.
- [21] Kafatos, M. (Ed.). (2013). *Bell's Theorem, Quantum Theory and Conceptions of the Universe (Vol. 37)*. Springer Science & Business Media.
- [22] Man'ko, V. I., & Tino, G. M. (1995). Experimental limit on the blue shift of the frequency of light implied by a  $q$ -nonlinearity. *Physics Letters A*, 202(1), 24-27.
- [23] de Matos Filho, R. L., & Vogel, W. (1996). Nonlinear coherent states. *Physical Review A*, 54(5), 4560.
- [24] Man'ko, V. I., Marmo, G., Sudarshan, E. C. G., & Zaccaria, F. (1997).  $f$ -Oscillators and nonlinear coherent states. *Physica Scripta*, 55(5), 528.
- [25] Roknizadeh, R., & Tavassoly, M. K. (2004). The construction of some important classes of generalized coherent states: the nonlinear coherent states method. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 37(33), 8111.
- [26] Faghihi, M. J. (2020). Generalized photon added and subtracted  $f$ -deformed displaced Fock states. *Annalen der Physik*, 532(12), 2000215.
- [27] Roknizadeh, R., & Tavassoly, M. K. (2004). Representations of coherent and squeezed states in a  $f$ -deformed Fock space. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 37(21), 5649.
- [28] Faghihi, M. J., & Tavassoly, M. K. (2011). Nonlinear quantum optical springs and their nonclassical properties. *Communications in Theoretical Physics*, 56(2), 327.
- [29] Faghihi, M. J. (2021). Nonclassicality of  $f$ -deformed photon-added-then-subtracted  $SU(1,1)$  and  $SU(2)$  displaced number states. *Optik*, 227, 165999.
- [30] Torkezadeh-Tabrizi, S., Faghihi, M. J., & Honarasa, G. (2023). Phase space nonclassicality and sub-Poissonianity of deformed photon-added nonlinear cat states: algebraic and group theoretical approach. *Optics Letters*, 48(3), 688-691.
- [31] Miry, S. R., Faghihi, M. J., & Mahmoudi, H. (2023). Nonclassicality of entangled Schrödinger cat states associated to generalized displaced Fock states. *Physica Scripta*.
- [32] Honarasa, G. R., Tavassoly, M. K., & Hatami, M. (2012). Quantum phase distribution and the number phase Wigner function of the generalized squeezed vacuum states associated with solvable quantum systems. *Chinese Physics B*, 21(5), 054208.
- [33] Honarasa, G. R., Tavassoly, M. K., & Hatami, M. (2009). Number-phase entropic uncertainty relations and Wigner functions for solvable quantum systems with discrete spectra. *Physics Letters A*, 373(43), 3931-3936.
- [34] Honarasa, G. R., Tavassoly, M. K., & Hatami, M. (2009). Quantum phase properties associated to solvable quantum systems using the nonlinear

- coherent states approach. *Optics Communications*, 282(11), 2192-2198.
- [35] Kis, Z., Vogel, W., & Davidovich, L. (2001). Nonlinear coherent states of trapped-atom motion. *Physical Review A*, 64(3), 033401.
- [36] Buck, B., & Sukumar, C. V. (1981). Exactly soluble model of atom-phonon coupling showing periodic decay and revival. *Physics Letters A*, 81(2-3), 132-135.
- [37] Fink, J. M., Göppl, M., Baur, M., Bianchetti, R., Leek, P. J., Blais, A., & Wallraff, A. (2008). Climbing the Jaynes-Cummings ladder and observing its nonlinearity in a cavity QED system. *Nature*, 454(7202), 315-318.
- [38] Sudarshan, E. C. G. (1993). Diagonal harmonious state representations. *International Journal of Theoretical Physics*, 32, 1069-1076.
- [39] Eftekhari, F., Tavassoly, M. K., & Behjat, A. (2022). Nonlinear interaction of a three-level atom with a two-mode field in an optomechanical cavity: Field and mechanical mode dissipations. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 596, 127176.
- [40] Faghihi, M. J., Baghshahi, H. R., & Mahmoudi, H. (2023). Nonclassical correlations in lossy cavity optomechanics with intensity-dependent coupling. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 613, 128523.
- [41] Mojaveri, B., & Taghipour, J. (2023). Entanglement protection of two qubits moving in an environment with parity-deformed fields. *The European Physical Journal Plus*, 138(3), 263.
- [42] Amo, A., Lefrère, J., Pigeon, S., Adrados, C., Ciuti, C., Carusotto, I., ... & Bramati, A. (2009). Superfluidity of polaritons in semiconductor microcavities. *Nature Physics*, 5(11), 805-810.
- [43] Brossard, F. S. F., Xu, X. L., Williams, D. A., Hadjipanayi, M., Hugues, M., Hopkinson, M., ... & Taylor, R. A. (2010). Strongly coupled single quantum dot in a photonic crystal waveguide cavity. *Applied Physics Letters*, 97(11).
- [44] Lisenfeld, J., Müller, C., Cole, J. H., Bushev, P., Lukashenko, A., Shnirman, A., & Ustinov, A. V. (2010). Rabi spectroscopy of a qubit-fluctuator system. *Physical Review B*, 81(10), 100511.
- [45] Agarwal, G. S. (2012). *Quantum Optics*. Cambridge University Press.
- [46] Baghshahi, H. R., & Tavassoly, M. K. (2014). Entanglement, quantum statistics and squeezing of two  $\Xi$ -type three-level atoms interacting nonlinearly with a single-mode field. *Physica Scripta*, 89(7), 075101.
- [47] Coffman, V., Kundu, J., & Wootters, W. K. (2000). Distributed entanglement. *Physical Review A*, 61(5), 052306.
- [48] Tessier, T. E., Deutsch, I. H., Delgado, A., & Fuentes-Guridi, I. (2003). Entanglement sharing in the two-atom Tavis-Cummings model. *Physical Review A*, 68(6), 062316.
- [49] Scully, M. O., & Zubairy, M. S. (1999). *Quantum Optics*. Cambridge University Press.
- [50] Rezakhaninezhad, M., Baghshahi, H. R., & Faghihi, M. J. (2023). Enhancement of nonclassicality of displaced number states by noiseless linear amplification. *Biquarterly Journal of Optoelectronic*, 5(2), 81-90.
- [51] Ficek, Z., & Wahiddin, M. R. (2014). *Quantum Optics for Beginners*. CRC Press.
- [52] Gerry, C. C., & Knight, P. L. (2005). *Introductory Quantum Optics*. Cambridge University Press.
- [53] Farzan, M. E., Faghihi, M. J., & Honarasa, G. (2021). Nonclassical properties of f-deformed photon-added squeezed Kerr states. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 565, 125569.