

## نور کند در موج‌بر بلور فوتونی پر شده با سیال نوری

داود جعفری<sup>1\*</sup>، مرتضی مختاری قلندری<sup>2</sup>، مصطفی صحرائی<sup>3</sup>

1. استادیار، مهندسی اپتیک و لیزر، دانشگاه بناب

2. کارشناسی ارشد، فیزیک، دانشگاه بناب

3. دانشیار، فیزیک کاربردی، دانشگاه تبریز

تاریخ پذیرش: 1395/06/24

تاریخ دریافت: 1395/05/15

## Slow Light in Photonic Crystal Waveguides Filled with Optofluidic

D. Jafari<sup>\*1</sup>, M. Mokhtari Ghalandari<sup>2</sup>, M. Sahraei<sup>3</sup>

1. Assistant Professor, Laser and Optical Engineering, University of Bonab

2. MSc., Physics, University of Bonab

3. Associate Professor, Applied Physics, Tabriz University

Received: 2016/08/05

Accepted: 2016/09/15

### Abstract

In this paper slow light properties in a line defect photonic crystal waveguide are investigated and Optofluidic are used for improving slow light properties. For proposed structure dispersion relations, group index, and group velocity dispersion are calculated through the 2D plane wave expansion method. It shows that by increasing the index of the liquid to infiltrate, slow light properties can be improved.

### Keywords

Slow Light, Photonic Crystal, Group Velocity, Group Velocity Dispersion, Plane Wave Expansion.

### چکیده

در این مقاله خواص نور کند در یک موج‌بر بلور فوتونی با نقص خطی بررسی شده است و برای بهبود مشخصه‌های نور کند از تکنیک تزریق سیال نوری در حفره‌های هوا استفاده شده است. برای ساختار موج‌بر پیشنهادی منحنی‌های پاشندگی، ضریب گروه و پاشندگی سرعت گروه با روش بسط موج تخت دو بعدی محاسبه شده است. محاسبات عددی نشان می‌دهد که با افزایش ضریب شکست سیال نوری تزریق شده به حفره‌های دایروی هوا، مشخصه‌های نور کند بهبود می‌یابند.

### واژگان کلیدی

نور کند، بلور فوتونی، سیال نوری، سرعت گروه، پاشندگی سرعت گروه، بسط موج تخت.

\* نویسنده مسئول: داود جعفری

ایمیل نویسنده مسئول:

\*Corresponding Author: [davodjafari@yahoo.com](mailto:davodjafari@yahoo.com)

## مقدمه

در سال‌های اخیر نور کند در موج‌برهای بلور فوتونی به علت قابلیت مجتمع‌سازی روی یک تراشه، عملکرد در دمای اتاق و تولید نور کند پهن باند و بدون پاشندگی توجهات زیادی را به خود جلب کرده است [1]. نوری را که سرعت گروهش،  $v_g$ ، در مقایسه با سرعت نور در خلأ،  $c$ ، به طور قابل توجهی کاهش یافته باشد، نور کند می‌نامند [2, 3]. شفافیت الکترومغناطیسی و نوسانات همدوس جمعیت، اولین روش‌های تولید نور کند هستند که براساس پاشندگی ماده پایه‌گذاری شده‌اند [4-8]. امروزه نور کند تولید شده در موج‌برهای بلور فوتونی مورد توجه پژوهشگران قرار گرفته است که بر اساس پاشندگی ساختاری است و مزیت‌های زیادی نسبت به روش‌های قبلی دارد [9, 10].

بلورهای فوتونی، محیط‌هایی با ضریب شکست متناوب از مرتبه طول‌موج نور هستند. این تناوب باعث به وجود آمدن یک باند ممنوع در ساختار باند بلور فوتونی می‌شود که از انتشار نور با فرکانسی در این محدوده جلوگیری می‌کند [11]. با ایجاد نقص در بلور فوتونی می‌توان یک یا چند هدایت در داخل باند ممنوع بلور فوتونی به وجود آورد. به‌عنوان مثال با ایجاد یک نقص خطی در بلور فوتونی کامل، یک موج‌بر بلور فوتونی به دست می‌آید و این موج‌بر نور را در راستای نقص هدایت می‌کند [12]. کاهش سرعت نور موجب افزایش برهمکنش نور و ماده می‌شود که سبب می‌شود مشاهده اثرهای اپتیک خطی و غیر خطی با توان ورودی کمتر یا طول نمونه کوچک‌تر ممکن شود. همچنین نور کند کاربردهای زیادی در مخابرات نوری دارد.

تاکنون کارهای متعددی در ارتباط با نور کند در موج‌برهای بلور فوتونی انجام شده است که بیشتر آنها به وسیله تغییرات نانومتری پارامترهای ساختاری موج‌بر از قبیل تغییرات مکان، اندازه، و یا شکل حفره‌های هوا بوده است؛ بنابراین تمامی روش‌های فوق به فناوری ساخت و دقت بسیار بالایی نیاز دارند و ساخت چنین قطعاتی بسیار مشکل و هزینه‌بر است.

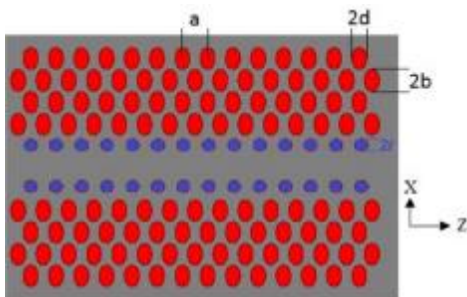
سیال نوری شاخه جدیدی از فتونیک است که ترکیبی از دانش نور و میکرو سیال است. با ترکیب ساختار بلور فوتونی و میکرو سیال ویژگی نوری قطعه تغییر می‌کند. در این شیوه، سیال نوری به درون برخی از حفره‌های بلور فوتونی تزریق می‌شود. به لطف این تکنولوژی، نخست

می‌توانیم ویژگی سیال نوری را کنترل کنیم و ابزارهای فوتونیک در ابعاد میکرومتر و نانومتر بسازیم. دوم می‌توانیم مجتمع نوری با استفاده از روش سیال نوری را انجام دهیم. سوم، مشکلات اشاره شده در بالا تا حدودی قابل رفع است [13-18].

در این مقاله برای غلبه بر مشکلات مهندسی پاشندگی، با استفاده از تکنولوژی سیال نوری به جای تغییرات نانومتری پارامترهای ساختاری، نور کند پهن باند با پاشندگی خیلی ناچیز ایجاد می‌کنیم. بدین منظور پس از بهینه‌سازی شعاع حفره‌های دایروی در مرکز موج‌بر بلور فوتونی، نور کند با ضریب گروه پایین ایجاد می‌گردد، سپس با تزریق سیال نوری به حفره‌های دایروی هوا در ردیف اول، پهنای باند نور کند را که یک کمیت مؤثر در بافرهای نوری است، افزایش داده می‌شود. همچنین پاشندگی سرعت گروه را که موجب از هم پاشیدگی و تغییر شکل پالس نوری می‌شود، به حداقل می‌رسانیم. به طور خلاصه مهندسی پاشندگی که به منظور دستیابی به نور کند با پهنای باند وسیع و پاشندگی سرعت گروه پایین انجام می‌گیرد، بدون دست‌کاری هندسه و پارامترهای ساختاری موج‌بر انجام شده است.

## طراحی موج‌بر

بلور فوتونی دوبعدی با آرایش مثلثی از حفره‌های بیضوی هوا در زمینه سیلیکون را در نظر می‌گیریم. نیم قطر بزرگ و کوچک حفره‌های هوا به ترتیب  $b=0.4$  و  $d=0.3$  انتخاب شده است. موج‌بر مورد نظر با ایجاد یک نقص خطی در ساختار بلور فوتونی دوبعدی و تغییر شکل حفره‌های ردیف اول از بیضوی به دایروی و تزریق سیال نوری در داخل آنها



شکل 4. ساختار موج‌بر بلور فوتونی پیشنهادی، نواحی قرمز، آبی و خاکستری رنگ به ترتیب هوا، سیال نوری تزریق شده و سیلیکون هستند.

با توجه به رابطه (2) با کاهش سرعت گروه پاشندگی سرعت گروه افزایش می‌یابد ولی برای حالتی که عبارت  $\frac{d^2w}{dk^2}$  کمینه باشد، مقدار پاشندگی سرعت گروه نیز کمینه خواهد شد؛ بنابراین هنگامی که یک مد هدایت خطی با یک نقطه عطف در منحنی پاشندگی ایجاد شود، نور کند با سرعت گروه پایین و پاشندگی سرعت گروه بسیار ناچیز به دست خواهد آمد.

معیار شایستگی نور کند<sup>1</sup> که به صورت حاصل ضرب تأخیر زمانی گروه در پهنای باند پهنجار شده تعریف می‌شود، اندازه‌ای از تعداد بیت‌های ذخیره شده در یک دستگاه نوری را مشخص می‌کند و به صورت زیر بیان می‌شود [23]:

$$NDBP = n_g \times DW/w_0 \quad (4)$$

که  $w_0$  فرکانس مرکزی پهنجار شده پالس نوری است.  $DW$  پهنای ضریب پاشندگی گروه در محدوده باند تخت است.

جهت مطالعه نحوه انتشار پالس‌های نوری در داخل موج بر بلور فوتونی پیشنهادی از روش تفاضل متناهی در حوزه زمان [24, 25] استفاده شده است. اکثر محاسبات با استفاده از نرم‌افزار Rsoft photonic cad محاسبه شده است.

### نتایج

ابتدا فرض می‌کنیم مایع نوری با ضریب شکست 2 به حفره‌های دایروی در ردیف اول اطراف نقص تزریق شده است و منحنی پاشندگی یا مدهای هدایت را به ازای مقادیر متفاوت شعاع حفره‌های دایروی برای مد TE رسم می‌کنیم (شکل 2). همان‌طور که از شکل 2 مشاهده می‌شود، با افزایش شعاع حفره‌های دایروی مدهای هدایت از حالت غیر خطی به شکل خطی تغییر می‌کنند. چون شیب منحنی پاشندگی نشانگر سرعت گروه است در نتیجه سرعت گروه با افزایش شعاع حفره‌ها کاهش می‌یابد؛ همچنین مدهای هدایت به سمت فرکانس‌های بالاتر جابجا می‌شوند.

به دست می‌آید (شکل 1). همچنین شعاع حفره‌های دایروی و ضریب شکست سیال نوری تزریق شده به آنها را به ترتیب  $r$  و  $n$  در نظر گرفته شده است و ثابت شبکه 500 nm انتخاب شده است.

### روش‌های محاسباتی

روش بسط موج تخت اصلی‌ترین روش برای محاسبه ساختار باند و تحلیل انتشار امواج الکترومغناطیسی درون بلورهای فوتونی و موج‌برهای بلور فوتونی است. روش بسط موج تخت شامل بسط توابع متناوب در سری فوریه مناسب و قرار دادن بسط در معادله موج است. نتیجه یک مسئله ویژه مقداری ماتریس نامحدود است که باید برای محاسبات عددی کوتاه شود. در حل مسئله ویژه مقداری، طیفی از ویژه فرکانس‌ها (ساختار باند) و بسط ظرایب برای ویژه مدهای بلوخ به دست می‌آید.

در حالت قطبش مغناطیسی، مد TE، میدان مغناطیسی  $H(r)$  عمود بر صفحه تناوب است و معادله ماتریسی زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} \hat{a}_{G\phi} \cdot (K+G) \cdot (K+G)\phi e^{-1} (G-G\phi)H_{G\phi} \\ = \frac{w^2}{c^2} H_G \end{aligned} \quad (1)$$

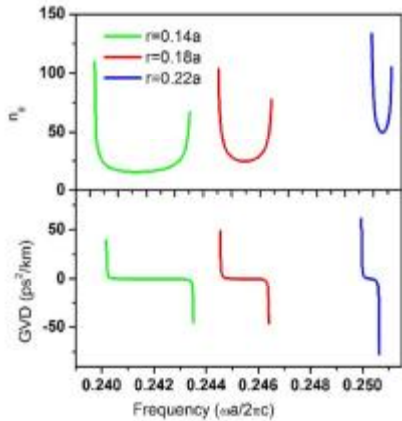
در رابطه فوق  $K$  بردار موج در ناحیه اول بریلیون و  $G$  بردار شبکه وارون است. همچنین  $e^{-1}$  تبدیل فوریه عکس تابع دی‌الکتریک است و نقش عمده‌ای را در تعیین ساختار باند بلور فوتونی بازی می‌کند [19-22].

برای درک انتشار پالس نوری در بلور فوتونی لازم است سرعت گروه و پاشندگی سرعت گروه را از طریق ساختار باند فوتونی به دست آوریم. سرعت گروه شیب منحنی پاشندگی بوده و ضریب شکست گروه بر حسب سرعت گروه به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$n_g = \frac{c}{v_g} = c \frac{dk}{dw} \quad (2)$$

پارامتر پاشندگی سرعت گروه که معیاری از اعوجاج پالس‌های نوری است، به صورت زیر تعریف می‌شود:

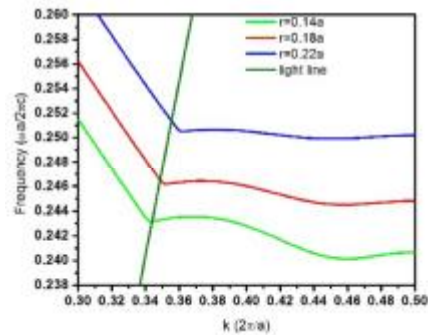
$$GVD = \frac{d^2k}{dw^2} = -\frac{1}{v_g^3} \frac{d^2w}{dk^2} \quad (3)$$



شکل 3. تغییرات ضریب گروه و پاشندگی سرعت گروه مدهای هدایت موجبر بلور فوتونی به ازای مقادیر مختلف شعاع حفره‌های دایروی پر شده با سیال نوری با  $n = 2.0$

قرار می‌دهیم. شکل 4 اثر تزریق مایع نوری با ضرایب شکست مختلف در حفره‌های دایروی، بر روی منحنی‌های پاشندگی مدهای هدایت را نشان می‌دهد. همان‌طور که در شکل 4 نشان داده شده است، با افزایش ضریب شکست سیال نوری تزریق شده به حفره‌های دایروی موجبر بلور فوتونی، مدهای هدایت به سمت فرکانس‌های پایین‌تر جابه‌جا می‌شوند. از طرفی با افزایش ضریب شکست سیال نوری تزریق شده، مدهای هدایت از حالت خطی با شیب تقریباً صفر به تدریج به حالتی غیر خطی تغییر شکل می‌دهند.

در شکل 5، ضریب گروه و پاشندگی سرعت گروه برای ضرایب شکست مختلف متناظر با شکل 4 نشان داده شده است. از شکل 5 مشاهده می‌شود که با افزایش ضریب شکست سیال نوری از  $1/9$  به  $2/2$  گرچه ضریب گروه از مقدار 63 به 35 کاهش می‌یابد، اما پهنای باند از 0.14THz به 0.36THz افزایش می‌یابد. در نتیجه می‌توان با استفاده از تکنیک تزریق سیال نوری در حفره‌های هوای موجبر بلور فوتونی پهنای ناحیه نور کند ایجاد شده را بهبود بخشید. در جدول 2 ضریب گروه میانگین، پهنای باند و عدد شایستگی برای هر یک از حالات نشان داده شده است. با توجه به جدول 2 با افزایش ضریب شکست سیال نوری، عدد شایستگی افزایش می‌یابد. با توجه به جدول 1 و 2، شعاع حفره‌های دایروی ضریب شکست سیال نوری اثرهای متفاوت بروی ویژگی‌های موجبر بلور فوتونی دارند. لذا با تنظیم این پارامترها نتایج مورد نظر را می‌توان به دست آورد.



شکل 2. مدهای هدایت موجبر بلور فوتونی مورد نظر به ازای مقادیر مختلف شعاع حفره‌های هوا ردیف اول پیرامون موجبر،  $\Gamma$  و  $n = 2.0$

در شکل 3 ضریب گروه و پاشندگی سرعت گروه متناظر با مدهای هدایت شکل 2 رسم شده است. همان‌طور که از شکل 3 مشاهده می‌شود، با افزایش شعاع حفره‌های دایروی از  $r = 0.14a$  تا  $r = 0.22a$  ضریب گروه از مقدار 16 به مقدار 50 افزایش می‌یابد، همچنین پهنای باند از مقدار 0.96THz به مقدار 0.18THz کاهش می‌یابد.

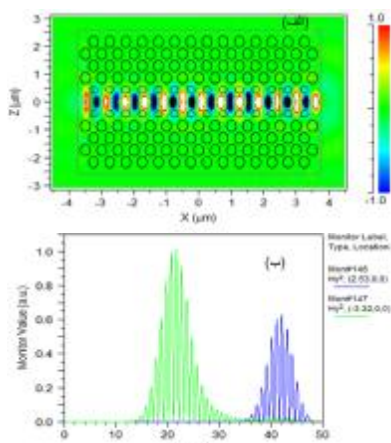
به منظور دستیابی به نور کند با پاشندگی ناچیز باید قسمت تخت هر کدام از مدهای هدایت را انتخاب کنیم، بدین منظور شعاع حفره‌ها را به‌دقت کنترل و پهنای باند بخش تخت منحنی‌های پاشندگی را تعیین می‌کنیم. در جدول 1 ضریب گروه میانگین، پهنای باند و عدد شایستگی برای هر یک از حالات نشان داده شده است. با توجه به جدول 1 با افزایش شعاع حفره‌های دایروی، عدد شایستگی کاهش می‌یابد.

جدول 1. ضریب گروه، پهنای باند و عدد شایستگی نور کند به ازای مقادیر مختلف شعاع حفره‌های دایروی پر شده با سیال نوری با ضریب شکست  $n = 2$

$r=2$	$\bar{n}_g$	$\Delta n$ (THz)	NDBP
0/14	16	0/96	0/106
0/18	25	0/54	0/092
0/22	50	0/18	0/060

برای اینکه اهمیت تزریق سیال نوری در حفره‌های موجبر بلور فوتونی را نشان دهیم، شعاع حفره‌های دایروی را برابر مقدار ثابت  $r = 0.22a$  انتخاب می‌کنیم و تأثیر تزریق سیال نوری با ضرایب شکست مختلف در حفره‌های دایروی ردیف اول مجاور نقص خطی را بر روی منحنی‌های مدهای هدایت، ضریب گروه و پاشندگی سرعت گروه مورد بررسی

توزیع میدان به حفره‌های هوای پیرامون موج بر وارد نمی‌شود و فقط در درون ناحیه موج بری محدود شده است. همچنین شکل 6 (ب) دامنه میدان الکتریکی پالس نوری منتشر شده در داخل موج بر را نشان می‌دهد که در ورودی و خروجی موج بر ثبت شده است. مشاهده می‌شود که پهناهای پالس در نصف بیشینه در حین عبور از موج بر، از 5.5mm در ورودی به 6.0mm در خروجی تغییر می‌یابد و پالس نوری با کمترین میزان تغییر شکل در موج بر منتشر می‌شود.



شکل 6. (الف) نحوه انتشار پالس نوری در موج بر بلور فوتونی، (ب) دامنه میدان الکتریکی پالس نوری در در ورودی (سبز رنگ) و خروجی (آبی رنگ) موج بر بلور فوتونی

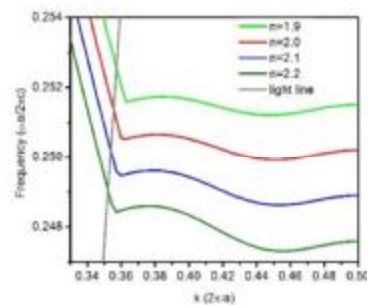
### بحث و نتیجه گیری

محاسبات نشان می‌دهند که با تزریق سیال نوری در حفره‌های دایروی موج بر بلور فوتونی، می‌توان مشخصه‌های نور کند را کنترل کرد. در این پژوهش نور کند با ضریب گروه 0/14 به دست می‌آید. همچنین با افزایش ضریب شکست سیال نوری از 1/9 به 2/2 معیار شایستگی محاسبه شده از 0/058- 0/085 افزایش می‌یابد و پاشندگی سرعت گروه، صفر باقی می‌ماند. مقادیر به دست آمده برای ضریب گروه، پهناهای باند و پاشندگی سرعت گروه موجب می‌شود پالس نوری با حداقل اعوجاج و تغییر شکل از موج بر مورد نظر انتقال یابد. موج بر مورد نظر به علت ایجاد نور کند با پهناهای باند فرکانسی وسیع و ضریب گروه پایین، برای کاربردهایی نظیر بافرهای نوری و افزایش برهمکنش نور و ماده مناسب است.

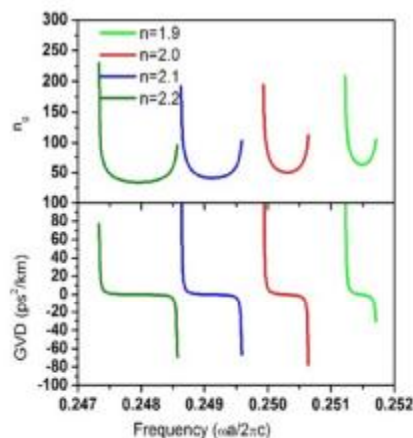
جدول 2. ضریب گروه، پهناهای باند و عدد شایستگی نور کند به ازای مقادیر مختلف ضریب شکست سیال نوری پر شده به حفره‌های دایروی

n	$\tilde{n}_g$	n(THz)	NDBP
1/9	63	0/14	0/058
2	50	0/18	0/060
2/1	41	0/26	0/071
2/2	35	0/36	0/085

شکل 6 (الف) نحوه انتشار پالس نوری با فرکانس مرکزی  $w_0 = 1.96 \left(\frac{2\pi c}{a}\right)$  را در موج بر بلور فوتونی به ازای  $n=2$  و  $r=0.22a$  نشان می‌دهد که با روش FDTD شبیه‌سازی شده است. در محاسبات از شرط مرزی شفاف در چهار طرف موج بر استفاده شده است. از شکل 6(الف) مشاهده می‌شود پالس نوری در داخل موج بر بلور فوتونی، پاشندگی بسیار ناچیزی را تجربه می‌کند. به طوری که



شکل 4. مدهای هدایت موج بر بلور فوتونی مورد نظر به ازای ضریب شکست مختلف سیال نوری برای حفره‌های دایروی به شعاع  $r = 0.22a$ .



شکل 5. ضریب گروه و پاشندگی سرعت گروه به ازای ضریب شکست مختلف سیال نوری برای حفره‌های دایروی به شعاع  $r = 0.22a$ .

## منابع

- [1] J. Hou, D. Gao, H. Wu, R. Hao, Z. Zhou, Flat Band Slow Light in Symmetric Line Defect Photonic Crystal Waveguides, *IEEE Photonics Technology Letters*, 21 (2009) 1571-1573.
- [2] S. Kubo, D. Mori, T. Baba, Low-group-velocity and low-dispersion slow light in photonic crystal waveguides, *Optics Letters*, 32 (2007) 2981-2983.
- [3] T. Baba, Slow light in photonic crystals, *Nature Photonics*, 2 (2008) 465-473.
- [4] D. Jafari, M. Sahrai, H. Motavalli, M. Mahmoudi, Phase control of group velocity in a dielectric slab doped with three-level ladder-type atoms, *Physical Review A*, 84 (2011) 063811-7.
- [5] D. Jafaria, M. Sahraib, H. Motavallia, Phase control of group velocity in one-dimensional photonic crystal with a dispersive defect layer, *Optik*, 124 (2013) 3305-3309.
- [6] D. Han, H. Guo, Y. Bai, H. Sun, Subluminal and superluminal propagation of light in an N-type medium, *Physics Letters A*, 334 (2005) 243-248.
- [7] M. Sahrai, M. Sharifi, M. Mahmoudi, The effect of an incoherent pumping on the dispersive and absorptive properties of a four-level medium, *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, 42 (2009) 1855011-185506.
- [8] G.S. Agarwal, T.N. Dey, S. Menon, Knob for changing light propagation from subluminal to superluminal, *Physical Review A*, 64 (2001) 053809-4.
- [9] J. Ma, C. Jiang, Demonstration of Ultraslow Modes in Asymmetric Line-Defect Photonic Crystal Waveguides, *IEEE Photonics Technology Letters*, 20 (2008) 1237-1239.
- [10] D. Mori, T. Baba, Wideband and low dispersion slow light by chirped photonic crystal coupled waveguide, *Optics Express*, 13 (2005) 9399-9408.
- [11] J.D. Joannopoulos, S.G. Johnson, J.N. Winn, R.D. Meade, *Photonic Crystals, Molding the Flow of Light*, Princeton University Press, Princeton and Oxford, 2008.
- [12] S.G. Johnson, P.R. Villeneuve, S. Fan, J.D. Joannopoulos, Linear waveguides in photonic-crystal slabs, *Physical Review B*, 62 (2000) 8212-8222.
- [13] D. Psaltis, S.R. Quake, C. Yang, Developing optofluidic technology through the fusion of microfluidics and optics, *Nature*, 442 (2006) 381-386
- [14] C. Monat, P. Domachuk, B.J. Eggleton, Integrated optofluidics: A new river of light, *Nature Photonics* 1(2007) 106-114.
- [15] C. Escobedo, A.G. Brolo, R. Gordon, D. Sinton, Optofluidic Concentration: Plasmonic Nanostructure as Concentrator and Sensor, *Nano Letters*, 12 (2012) 1592-1596.
- [16] L. Pang, H.M. Chen, L.M. Freeman, Y. Fainman, Optofluidic devices and applications in photonics, sensing and imaging, *Lab on a Chip*, 12 (2012) 3543-3551.
- [17] G. Testa, G. Persichetti, L. Zeni, P.M. Sarro, R. Bernini, Optofluidics: a new tool for sensing, *Proceedings of SPIE*, 8794 (2013) 879402-6.
- [18] M. Janfaza, M.A. Mansouri-Birjandi, Wideband slow light in photonic crystal slab waveguide based on geometry adjustment and optofluidic infiltration, *Applied Optics*, 52 (2013) 8184-8189.
- [19] F. Torkashvand, G. Darvish, E. Darabi, Improvement of absolute band gap properties in 2D photonic crystals consist of GaAs rods in air background, *Journal of Theoretical and Applied Physics*, 4 (2011) 25-28.
- [20] R. Wang, X.H. Wang, B.Y. Gu, G.Z. Yang, Effects of shapes and orientations of scatterers and lattice symmetries on the photonic band gap in two-dimensional photonic crystals, *Journal of Applied Physics*, 90 (2001) 4307-4313.
- [21] X.-H. Wang, B.Y. Gu, Z.Y. Li, G.Z. Yang, Large absolute photonic band gaps created by rotating noncircular rods in two-dimensional lattices, *Physical Review B*, 60 (1999) 11417-11421.
- [22] M. Moghimi, S. Mirzakuchaki, N. Granpayeh, N. Nozhat, G.H. Darvish, Modification of photonic crystals for obtaining common band gaps for TE and TM waves, *Canadian Journal of Physics*, 90 (2012) 175-180
- [23] Y. Zhai, H. Tian, Y. Ji, Slow Light Property Improvement and Optical Buffer Capability in Ring-Shape-Hole Photonic Crystal Waveguide, *Journal of Lightwave Technology*, 29 (2011) 3083-3090.
- [24] D.M. Sullivan, A Simplified PML for Use with the FDTD Method, *IEEE Microwave and Guided Wave Letters*, 6 (1996) 97-99.
- [25] D.M. Sullivan, *Electromagnetic simulation using the FDTD method* Wiley-IEEE Press, New York, 2013.