

تحول یک حالت همدوس غیرخطی در یک نوسانگر پارامتری در حضور محیط کر

غلامرضا هنرآسا

دانشیار، فیزیک، دانشگاه صنعتی شیراز

تاریخ دریافت: 1398/09/07 تاریخ پذیرش: 1398/12/13

Evolution of a Nonlinear Coherent State in a Parametric Oscillator in Presence of the Kerr Medium

G.H. Honarasa

Associate Professor, Physics, Shiraz University of Technology

Received: 2019/11/28 Accepted: 2020/03/03

Original Article

مقاله پژوهشی

Abstract

In this paper, the temporal evolution of the nonlinear coherent states in a parametric oscillator in the presence of a Kerr medium is investigated. For this purpose, the Hamiltonian of the system is written in the interaction picture and as a combination of time-independent operators with time - dependent coefficients using an approximation method. Then, the temporal evolution of a nonlinear coherent state is obtained by exerting the corresponding time-evolution operator. In addition, the Mandel parameter, the auto - correlation function and the Husimi-Q distribution function of the time-dependent nonlinear coherent states in the parametric oscillator in a Kerr Medium are studied and analyzed.

Keywords

Nonlinear Coherent States, Parametric Oscillator, Auto-Correlation Function, Mandel Parameter, Kerr Medium.

چکیده

در این مقاله تحول زمانی حالت‌های همدوس غیرخطی در یک نوسانگر پارامتری در حضور محیط کر بررسی شده است. به این منظور هامیلتونی سیستم در تصویر برهمکنش و با استفاده از یک روش تقریبی به صورت ترکیبی از عملگرهای مستقل از زمان با ضرایب وابسته به زمان نوشته شده است؛ سپس تحول زمانی حالت‌های همدوس غیرخطی با اعمال عملگر تحول زمانی به دست آمده است؛ علاوه بر آن، پارامتر مندل، تابع خودهمبستگی و تابع توزیع هوسیمی حالت‌های همدوس غیرخطی وابسته به زمان در نوسانگر پارامتری در حضور محیط کر بررسی و تحلیل شده است.

واژگان کلیدی

حالت‌های همدوس غیرخطی، نوسانگر پارامتری، تابع خودهمبستگی، پارامتر مندل، محیط کر.

مقدمه

مطالعه کوانتومی نوسانگرهای هماهنگ وابسته به زمان به دلیل اینکه سیستم‌های دینامیکی در حوزه‌های مختلف فیزیک می‌توانند توسط این نوع نوسانگر هماهنگ توصیف شوند، بسیار مورد علاقه هستند [1, 2]. یک نوع از نوسانگرهای هماهنگ وابسته به زمان، نوسانگر هماهنگ با فرکانس وابسته به زمان است که به آن نوسانگر پارامتری می‌گویند. یک کاواک یا فرکانس مد متغیر ناشی از حرکت دیواره‌های کاواک یا تابع دی الکتریک متغیر مثال‌هایی از نوسانگرهای پارامتری هستند [3]. روش‌های مختلفی برای مطالعه نوسانگر پارامتری پیشنهاد شده است که از میان این روش‌ها می‌توان به روش‌های جبری [4, 5]، روش بی‌دررو بودن تغییر [6, 7]، روش‌های تقریبی مختلف [8] و روش کوانتومی فرامتقارن [9] اشاره کرد. برهمکنش یک محیط کر با یک حالت همدوس یک روش متداول برای تولید حالت‌های غیر کلاسیکی است [10]. محیط کر نمی‌تواند آمار تعداد فوتون‌های میدان ورودی را تغییر دهد؛ اما چلانگی در مولفه‌های میدان ایجاد می‌کند [11]. تحول حالت‌های همدوس در یک نوسانگر پارامتری با یک محیط شبه کر پیش از این انجام شده است [12].

حالت‌های همدوس غیرخطی یکی از تعمیم‌های مهم حالت‌های همدوس استاندارد هستند [13, 14]؛ این حالت‌ها به عنوان ویژه حالت‌های عملگر نابودی تعمیم یافته $A = af(n)$ تعریف می‌شوند که در آن عملگر نابودی بوزونی و $f(n)$ تابعی از عملگر تعداد $n = a^\dagger a$ است. در این مقاله به بررسی تحول زمانی یک حالت همدوس غیرخطی در یک نوسانگر پارامتری در حضور محیط کر با استفاده از روش تصویر برهمکنش می‌پردازیم؛ همچنین پارامتر مندل¹، تابع خودهمبستگی² و تابع توزیع هوسیمی³ سیستم بررسی می‌شود.

نوسانگر پارامتری در یک محیط کر

هامیلتونی یک نوسانگر پارامتری درون محیط کر با فرکانس وابسته به زمان $W(t)$ به صورت زیر داده می‌شود [12, 15]:

$$H(t) = \frac{1}{2}[p^2 + W(t)^2 q^2] + H_{\text{Kerr}} \quad (1)$$

که در آن $H_{\text{Kerr}} = ca^{\dagger 2}a^2 = cn(n-1)$ هامیلتونی محیط کر است و

$$q = \frac{1}{\sqrt{2W_0}}(a^\dagger + a), \quad (2)$$

$$p = i\sqrt{\frac{W_0}{2}}(a^\dagger - a) \quad (3)$$

اینجا a^\dagger عملگر خلق بوزونی و c مرتبط با پذیرفتاری مرتبه سوم محیط کر است. فرکانس وابسته به زمان می‌تواند به صورت زیر در نظر گرفته شود [16]:

$$W(t) = W_0[1 + 2k \cos(2W_0 t)] \quad (4)$$

که در آن k مرتبه تصحیحات نوسانی و یک پارامتر کوچک است. با تعریف پارامتر وابسته به زمان جدید $g(t) = W_0 k \cos(2W_0 t)[1 + k \cos(2W_0 t)]$ هامیلتونی را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$H(t) = W_0(n + \frac{1}{2}) + c(n^2 - n) + g(t)(a^2 + a^{\dagger 2} + 2n + 1) \quad (5)$$

این هامیلتونی در تصویر برهمکنش به صورت زیر به دست می‌آید:

$$H_1(t) = U_0^\dagger [g(t)(a^2 + a^{\dagger 2} + 2n + 1)] U_0 = g(t)[e^{-2iW_0(t)t} a^2 + a^{\dagger 2} e^{2iW_0(t)t} + 2n + 1] \quad (6)$$

که در آن $W_n(t) = W_0 + 2c(n+1/2)$ و $U_0 = \exp[-iW_0(n+1/2)t - ic(n^2 - n)t]$ عملگر تحول زمانی مربوط به بخش مستقل از زمان هامیلتونی است. حال با استفاده از روش تقریبی که در آن عملگرهای نمایی $e^{\pm 2iW_0(t)t}$ با مقادیر چشمداشتی آنها جایگزین می‌شوند، می‌توان هامیلتونی را به صورت ترکیب خطی از عملگرهای مستقل از زمان نوشت [17]:

1. Mandel Parameter
2. Auto-Correlation Function
3. Husimi Distribution Function

$$\mathbb{H}_1(t) = g(t)[e^{-2i(W_0+c)t} a^2 \langle e^{-4icnt} \rangle + a^{\dagger 2} e^{2i(W_0+c)t} \langle e^{4icnt} \rangle + 2n + 1] \quad (7)$$

به کمک شکل صریح U_0 و U_1 تحول حالت‌های همدوس غیرخطی به صورت زیر به دست خواهد آمد:

$$|a, f; t\rangle = N_{a,f} \hat{a}_{n,m,s} \frac{(a e^{g_1 - iW_0 t})^n (g_3 e^{-2g_2 + 2iW_0 t})^m (g_4 e^{-2iW_0 t})^s}{m! s! f(n)! (n-2m)! \sqrt{(n-2m+2s)!} e^{-itc(n-2m+2s)^2} |n-2m+2s\rangle} \quad (13)$$

که در آن ثابت بهنجارش از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$N_{a,f} = e^{g_1 - iW_0 t/2} \frac{\hat{e}_a^\dagger}{\hat{e}_a} \frac{|a|^2}{n! [f(n)]!} \hat{u}^{-1/2} \quad (14)$$

ویژگی‌های غیر کلاسیکی و آماری

در این بخش به بررسی تحول زمانی برخی ویژگی‌های حالت‌های همدوس غیرخطی می‌پردازیم و به این منظور پارامتر مندل، تابع خود همبستگی و تابع توزیع هوسیمی آنها را تحلیل خواهیم کرد. در این جا از تابع غیرخطی یکی از معروفترین پتانسیل‌های سیستم‌های فیزیکی یعنی پتانسیل پوئل-تلا استفاده می‌کنیم. این پتانسیل و حالت‌های همدوس غیرخطی متناظر با آن به دلیل کاربردهای فراوان در زمینه‌های مختلف، به‌ویژه در فیزیک اتمی و مولکولی بسیار مورد توجه هستند. برای این پتانسیل تابع غیرخطی به صورت $f(n) = \sqrt{n+n}$ با $n > 2$ است [20].

پارامتر مندل

پارامتر مندل، معروفترین معیار برای بررسی رفتار غیر کلاسیکی یک حالت کوانتومی است. پارامتر مندل با رابطه زیر داده می‌شود [21]:

$$Q_M = \frac{\langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2}{\langle n \rangle} - 1 \quad (15)$$

پارامتر مندل، مقادیر مثبت و منفی را به ترتیب برای توزیع فراپواسونی (حالت کلاسیک) و زیرپواسونی (حالت غیر کلاسیک) به خود می‌گیرد. با استفاده از رابطه (13) برای

که در آن مقادیر چشمداشتی روی یک حالت اولیه همدوس هامیلتونی در تصویر برهمکنش و عملگر تحول زمانی متناظر آن به ترتیب می‌توانند به صورت زیر نوشته شوند [19,18]:

$$\mathbb{H}_1(t) = \hat{a}_{n=1}^{\dagger 4} f_n(t) X_n \quad (8)$$

$$U_1(t) = \hat{O}_{n=1}^{\dagger 4} e^{g_{n(t)} X_n} \quad (9)$$

که در آن $X_4 = 1$ ، $X_3 = a^2$ ، $X_2 = n$ ، $X_1 = a^{\dagger 2}$ با $f_4 = g(t)$ ، $f_2 = 2g(t)$ ، $f_1 = g(t)e^{2i(W_0+c)t} \langle e^{4icnt} \rangle$ و ضرائب g_1 تا g_4 با جایگذاری روابط (8) و (9) در معادله شرودینگر که به معادلات زیر منجر می‌شود، با شرط اولیه $g_n(0) = 0$ به دست می‌آید [12]:

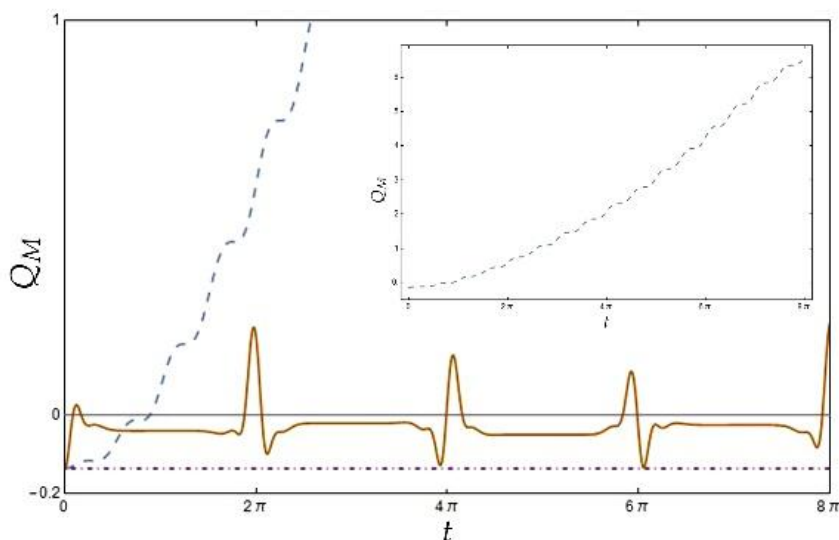
$$\begin{aligned} \mathcal{G}_1 &= -i(f_1 + 2g_1 f_2 + 4g_1^2 f_3) \\ \mathcal{G}_2 &= -i(f_2 + 4g_1 f_3) \\ \mathcal{G}_3 &= -i f_3 e^{2g_2} \\ \mathcal{G}_4 &= -i(f_4 + 2g_1 f_3) \end{aligned} \quad (10)$$

حالت‌های همدوس غیرخطی در پایه حالت‌های عددی به صورت زیر بیان می‌شوند [13]:

$$|a, f\rangle = N_f \hat{a}_{n=0}^{\dagger 4} \frac{a^n}{\sqrt{n! [f(n)]!}} |n\rangle \quad (11)$$

که در آن N_f تابع بهنجارش و تحول زمانی حالت‌های همدوس غیرخطی $|a, f\rangle$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$|a, f; t\rangle = U_0(t) U_1(t) |a, f\rangle \quad (12)$$



شکل 1. پارامتر مندل حالت‌های همدوس غیرخطی وابسته به زمان در یک نوسانگر پارامتری در یک محیط کر برحسب زمان با $a = 2$ ، $W_0 = 1$ و $a_0 = 2$ برای $c = 0$ و $k = 0.05$ (منحنی خطچین)، $c = 0.25$ و $k = 0$ (منحنی خط-نقطه) و $c = 0.25$ و $k = 0.25$ (منحنی توپر).

تابع خودهمبستگی متناظر با حالت‌های همدوس غیرخطی در نوسانگر پارامتری در حضور محیط کر به شکل زیر به دست می‌آید:

$$A(t) = e^{g_1 t - iW_0 t/2} \frac{\hat{a} \int_{\hat{a}=0}^{\hat{a}} |a|^2 \frac{\hat{u}^{-1}}{n! [f(n)]^2 \hat{u}}}{\hat{a}} \frac{(|a|^2 e^{g_2 - iW_0 t})^n (a^{*-2} g_3 e^{-2g_2 + 2iW_0 t})^m}{m! s! f(n)! f(n-2m+2s)!} \frac{(a^{*2} g_1 e^{-2iW_0 t})^s}{(n-2m)!} e^{-itc(n-2m+2s)^2} \quad (17)$$

در شکل 2 تابع خودهمبستگی برای مقادیر متفاوت پارامترها رسم شده است. برای $c = 0$ تنها نوسانگر پارامتری داریم و تابع خودهمبستگی یک تابع تناوبی کاهشی با زمان است و احیای جزئی را نشان می‌دهد. در شکل 2 (ب)، تابع خودهمبستگی برای حالت $k = 0$ رسم شده است. این شکل نشان می‌دهد در حالت کلی احیای جزئی داریم؛ اما در $t = 8\pi$ احیای کامل رخ می‌دهد؛ همچنین دیده می‌شود که تابع خودهمبستگی نسبت به $t = 4\pi$ متقارن است. شکل 2 (ج) نشان می‌دهد وقتی c و k هر دو همزمان غیرصفر باشند، تنها احیای جزئی دیده می‌شود.

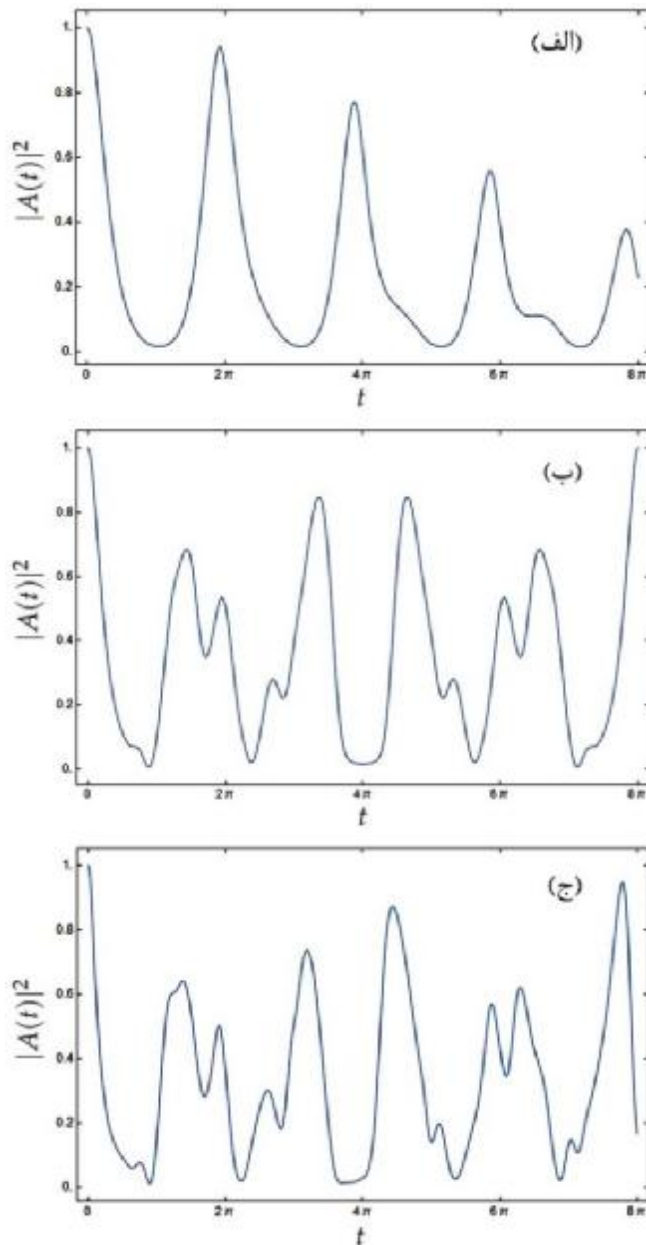
تحول زمانی حالت‌های همدوس غیرخطی، $\langle n^2 \rangle$ و $\langle n \rangle$ را می‌توان محاسبه کرد. در شکل 1 پارامتر مندل متناظر با حالت همدوس حالت معرفی شده برحسب زمان برای پتانسیل پوشل-تلا رسم شده است. برای نوسانگر هماهنگ پارامتری، یعنی حالت $c = 0$ ، نمودار نشان می‌دهد که پارامتر مندل در زمان‌های کوچک منفی است و با افزایش زمان مثبت می‌شود. با توجه به شکل مشاهده می‌شود که برای $c = 0.25$ با $k = 0$ ، پارامتر مندل برای تمام زمان‌ها منفی است که نشان دهنده غیرکلاسیکی بودن حالت‌های مورد نظر است. برای $c = 0.25$ با $k = 0.25$ ، پارامتر مندل رفتار نوسانی دارد و توزیع متناوب فراپواسونی و زیرپواسونی را نشان می‌دهد.

تابع خودهمبستگی

تابع خودهمبستگی، همپوشانی بین یک حالت کوانتومی وابسته به زمان و حالت اولیه آن را نشان می‌دهد [22].

$$A(t) = \langle a, f; t | a, f; 0 \rangle \quad (16)$$

غلامرضا هنرآسا: تحول یک حالت همدوس غیرخطی در یک نوسانگر پارامتری در حضور محیط کر 13



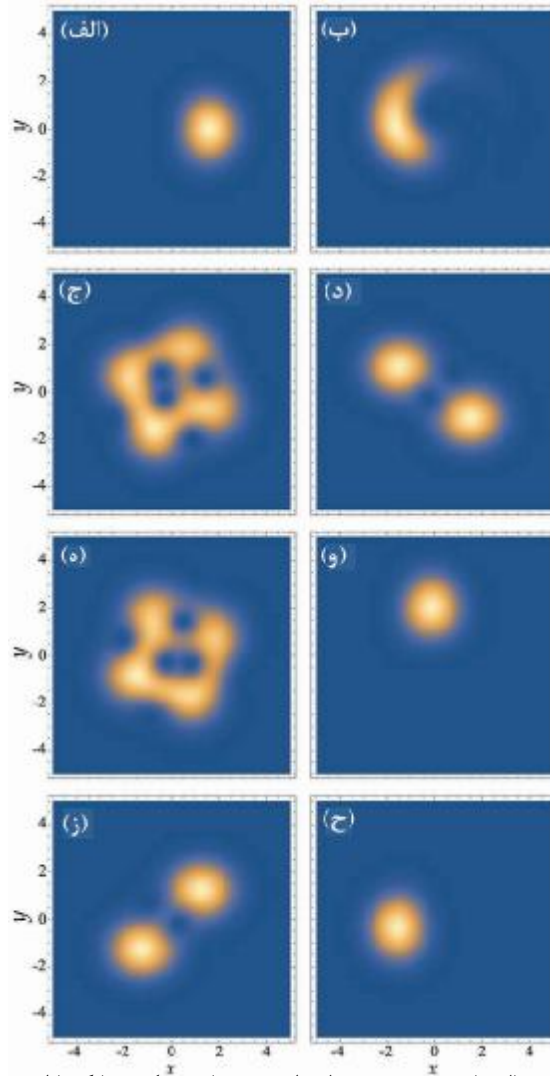
شکل 2. تابع خود همبستگی حالت‌های معرفی شده بر حسب زمان با $a = a_0 = 2$ و $W_0 = 1$ برای الف) $c = 0$ و $k = 0.05$ و ب) $c = 0.25$ و $k = 0$ و ج) $c = 0.25$ و $k = 0.25$.

که در آن r عملگر چگالی و $|z\rangle$ یک حالت همدوس است. تابع توزیع هوسیمی حالت‌های همدوس غیرخطی در نوسانگر پارامتری در حضور محیط کر با جایگذاری $r = |a, f; t\rangle\langle a, f; t|$ در رابطه (18)، به صورت زیر به دست می‌آید:

تابع توزیع هوسیمی

تابع توزیع هوسیمی معمولاً برای نمایش ساده‌ای از یک حالت کوانتومی استفاده می‌شود. تابع توزیع هوسیمی با رابطه زیر نشان داده می‌شود [6]:

$$Q_H = \frac{1}{p} \langle z | r | z \rangle \quad (18)$$



شکل 3. تابع توزیع هوسیمی حالت‌های همدوس غیرخطی وابسته به زمان در یک نوسانگر پارامتری در یک محیط کر به صورت تابعی از $z = x + iy$ با $a = 4$ و $W_0 = 1$ ، $a_0 = 4$ و $c = 0.25$ ، $k = 0.8$ برای الف) $t = 0$ ، ب) $t = p/4$ ، ج) $t = p$ ، د) $t = 2p$ ، ه) $t = 3p$ ، و) $t = 4p$ ، ز) $t = 6p$ ، ح) $t = 8p$.

تابع توزیع هوسیمی برحسب $\text{Re}(z)$ و $\text{Im}(z)$ (بخش حقیقی و موهومی z) در زمان‌های مختلف در شکل 3، نمایش داده شده است. همانطور که در شکل 3 (الف)، دیده می‌شود، تابع توزیع هوسیمی در $t = 0$ به صورت گاوسی است. شکل 3 (ج)، نشان می‌دهد در $t = p$ تابع توزیع دارای دو قله است. از آنجا که این شبیه تابع توزیع حالت گربه است، چلانگی را نشان می‌دهد. در شکل 3 (و)، تابع هوسیمی در زمان $t = 4p$ نمایش داده شده است که دارای یک قله است. از شکل‌های 3 (ه) و (ز)، مشاهده می‌شود که تابع توزیع هوسیمی به‌ترتیب دارای چهار و دو

(19)

$$Q_H = \frac{1}{p} \left| N_{a,f} e^{-\frac{|z|^2}{2}} \sum_{n,m,s} \frac{(z^* a e^{g_2 - iW_0 t})^n (z^{*-2} g_3 e^{-2g_2 + 2iW_0 t})^m}{m! s! f(n)! (n-2m)!} (z^{*-2} g_1 e^{-2iW_0 t})^s e^{-itc(n-2m+2s)^2} \right|^2$$

حالت‌های مختلف با توابع غیرخطی مشخص تعمیم داده شود. در ادامه، این رهیافت برای پتانسیل پوشل-تلا به کار برده شد و تحول زمانی برخی ویژگی‌های آماری و غیرکلاسیکی آن مانند پارامتر مندل، تابع خودهمبستگی و تابع توزیع هوسیمی بررسی گردید. نتایج نشان داد این حالت‌ها از جمله حالت‌های غیرکلاسیکی هستند و تابع خودهمبستگی و تابع توزیع هوسیمی آنها یک تابع تناوبی برحسب زمان است.

قله در $t = 3p$ و $t = 6p$ است. در نهایت همان طور که در شکل 3 (ح) دیده می‌شود، تابع توزیع هوسیمی دارای یک قله در زمان احیای $t = 8p$ است.

بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله تحول زمانی یک حالت همدوس غیرخطی در یک نوسانگر پارامتری غیرخطی با استفاده از اعمال عملگر تحول زمانی یک نوسانگر پارامتری در حضور محیط کر مطالعه شد. این رهیافت می‌تواند برای

References

- [1] S. Menouar, M. Maamache and J. R. Choi, An alternative approach to exact wave functions for time-dependent coupled oscillator model of charged particle in variable magnetic field, *Ann. Phys.* 325 (2010) 1708–1719.
- [2] Y. Gao, R. F. O'Connell, Q. B. Tang and R. M. Wang, *Eur. Phys. J. D* 69 (2015) 20.
- [3] V. V. Dodonov, A. B. Klimov and D. E. Nikonov, Quantum phenomena in nonstationary media, *Phys. Rev. A* 47 (1993) 4422–4429.
- [4] B. Gazdy and D. A. Micha, The linearly driven parametric oscillator: application to collisional energy transfer, *J. Chem. Phys.* 82 (1985) 4926–4936.
- [5] J. Récamier and R. Jáuregui, Time-evolution operator for a forced parametric oscillator, *Int. J. Quantum Chem.* 62 (1997) 125–135.
- [6] H. R. Lewis, Classical and quantum systems with time-dependent harmonic-oscillator-type Hamiltonians, *Phys. Rev. Lett.* 18 (1967) 510–512.
- [7] V. Dodonov and O. Man'ko, Universal invariants in quantum mechanics and physics of optical and particle beams, *J. Russ. Laser Res.* 21(2000) 438–464.
- [8] T. Kiss, J. Janszky and P. Adam, Time evolution of harmonic oscillators with time-dependent parameters: a step-function approximation, *Phys. Rev. A* 49 (1994) 4935–4942.
- [9] O. Castañón, D. Schuch and O. Rosas-Ortiz, Generalized coherent states for time-dependent and nonlinear Hamiltonian operators via complex Riccati equations, *J. Phys. A* 46 (2013) 075304.
- [10] R. Tanas, *Coherence and Quantum Optics V*, New York: Plenum (1984).
- [11] B. Yurke and D. Stoler, Generating quantum mechanical superpositions of macroscopically distinguishable states via amplitude dispersion, *Phys. Rev. Lett.* 57 (1986) 13–16.
- [12] R. Roman-Ancheyta, M. Berrondo and J. Recamier, Parametric oscillator in a Kerr medium: evolution of coherent states, *J. Opt. Soc. Am. B* 32 (2015) 1651–1655.
- [13] V. I. Man'ko, G. Marmo, E. C. G. Sudarshan and F. Zaccaria, foscillators and nonlinear coherent states, *Phys. Scr.* 55 (1997) 528–541.
- [14] R. L. de Matos Filho and W. Vogel, Nonlinear coherent states, *Phys. Rev. A* 54 (1996) 4560–4563.
- [15] R. de. J. León-Montiel and H. Moya-Cessa, Generation of squeezed Schrödinger cats in a tunable cavity filled with a Kerr medium, *J. Opt.* 17 (2015) 065202.
- [16] V. V. Dodonov, M. A. Marchioli, Y. A. Korennoy, V. I. Man'ko and Y. A. Moukhin, Dynamical squeezing of pho-

ton-added coherent states, *Phys. Rev. A* 58 (1998) 4087–4094.

[17] M. Berrondo and J. Récamier, Dipole induced transitions in an anharmonic oscillator: a dynamical mean field model, *Chem. Phys. Lett.* 503 (2011) 180–184.

[18] J. Wei and E. Norman, Lie algebraic solution of linear differential equations, *J. Math. Phys.* 4 (1963) 575–581.

[19] J. Wei and E. Norman, On global representations of the solutions of linear differential equations as a product of ex-

ponentials, *Proc. Am. Math. Soc.* 15 (1964) 327–334.

[20] G. R. Honarasa, M. K. Tavassoly and M. Hatami, Quantum phase properties associated to solvable quantum systems using the nonlinear coherent states approach, *Opt. Commun.* 282 (2009) 2192–2198.

[21] L. Mandel, Sub-Poissonian photon statistics in resonance fluorescence, *Opt. Lett.* 4 (1979) 205–207.

[22] R. Robinett, Quantum wave packet revivals, *Phys. Rep.* 392 (2004) 1–119.