

طراحی و اعتبارسنجی الگوی برنامه درسی توسعه دانش محتوایی تخصصی دانشجومعلمان آموزش

ابتدایی: یک مطالعه موردی با روش ترکیبی در تقسیم کسرها

حمید دافعی^{1*}، محمدرضا امام جمعه²، علیرضا عصاره³، صادق نصری⁴

1. دانشجوی دکتری، برنامه ریزی درسی، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی تهران و آموزشگر ریاضی دانشگاه فرهنگیان

2. دانشیار، گروه علوم تربیتی، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی تهران

3. دانشیار، گروه علوم تربیتی، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی تهران

4. دانشیار، گروه علوم تربیتی، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی تهران

تاریخ دریافت: 1399/04/15 تاریخ پذیرش: 1399/09/30

Designing and Validating the Pattern of Curriculum for Developing the Specialized Content Knowledge of Primary Student Teachers: A Case Study with Mixed Method in Division of Fractions

H. Dafeei^{1*}, M.R. Emam Jomeh², A.R. Assareh³, S. Nasri⁴

1. Ph.D. Student, Curriculum Planning, Shahid Rajaei Teacher Training University & Math Educator of Farhangian University
2. Associate Professor, Department of Educational Sciences, Shahid Rajaei Teacher Training University, Tehran, Iran
3. Associate Professor, Department of Educational Sciences, Shahid Rajaei Teacher Training University, Tehran, Iran
4. Associate Professor, Department of Educational Sciences, Shahid Rajaei Teacher Training University, Tehran, Iran

Received: 2020/07/11 Accepted: 2020/12/20

Abstract

The aim of the present research was the designing and validating a Pattern of Curriculum for Developing the Student Teachers Specialized Content Knowledge in Division of Fractions. This research was the mixed Research with Exploratory Design and Taxonomy Development Model. In the qualitative part, the Curriculum Pattern was designed with case study method, and in the quantitative part, the Pattern validation was done with Descriptive-survey method. Participants in the qualitative Part included 19 experts and 61 sources. The statistical population in quantitative part included the specialists in math education and primary school teachers. Through purposive sampling, 22 specialists and 85 teachers were selected. For collecting qualitative data, documentary study, semi-structured interviews and for collecting quantitative data, researcher-made questionnaire with 13 items were used. For analyzing the qualitative data, the content analysis was used and in the quantitative part, confirmatory factor analysis was used. Results of analysis of elements showed that the items of content and learning activities, skill goals, cognitive goals at the level of analysis and composition level and evaluation methods have the most explanatory power. Also other elements such as teaching-learning methods, attitudinal goals and Clarity and comprehensiveness were in next priorities.

Keywords

Designing, Curriculum, Specialized Content Knowledge, Division of Fractions.

چکیده

هدف پژوهش حاضر طراحی و اعتبارسنجی الگوی برنامه درسی توسعه دانش محتوایی تخصصی دانشجومعلمان آموزش ابتدایی در تقسیم کسرها بوده است. این پژوهش جزء پژوهش‌های ترکیبی با طرح اکتشافی بود که با مدل تدوین طبقه‌بندی در دو بخش کیفی و کمی انجام شد. در بخش کیفی با روش مطالعه موردی به فرآیند طراحی الگو و در بخش کمی با روش توصیفی از نوع پیمایشی به اعتبارسنجی الگو پرداخته شد. مشارکت‌کنندگان در بخش کیفی شامل 19 نفر از افراد متخصص و 61 پژوهش انجام شده در ارتباط با موضوع پژوهش بودند. جامعه آماری در بخش کمی شامل آموزشگران ریاضی دانشگاه فرهنگیان، متخصصان آموزش ریاضی و معلمان دوره ابتدایی بودند که از طریق نمونه‌گیری هدفمند تعداد 22 نفر از متخصصان و 85 نفر از معلمان دوره ابتدایی انتخاب شدند. برای گردآوری داده‌ها در بخش کیفی از مطالعه اسنادی و مصاحبه‌های نیمه ساختاریافته و در بخش کمی از پرسش‌نامه محقق ساخته که شامل 13 گویه بود استفاده شد. تحلیل داده‌ها در بخش کیفی با روش تحلیل محتوا و در بخش کمی با تحلیل عاملی تأییدی انجام شد. نتایج تحلیل عناصر نشان داد که عناصر محتوا و فعالیت‌های یادگیری، اهداف مهارتی، اهداف شناختی در سطح تجزیه و تحلیل و سطح ترکیب و روش‌های ارزشیابی دارای بیشترین قدرت تبیین هستند، همچنین عناصر دیگر نظیر روش‌های یاددهی یادگیری، اهداف نگرشی و وضوح و جامعیت برنامه درسی نیز به ترتیب به عنوان تبیین‌کننده‌های معنادار شناسایی شدند.

واژگان کلیدی

طراحی، برنامه درسی، دانش محتوایی تخصصی، تقسیم کسرها.

مقدمه

مطالعات و پژوهش‌های انجام شده درباره نقش معلم در آموزش، همه بر این نکته تاکید دارند که کیفیت تدریس معلم، مهم‌ترین عامل اثربخش در یادگیری دانش‌آموزان است. با توجه به اینکه افزایش عملکرد دانش‌آموزان در گروه تربیت معلم موثر است، بسیاری از صاحب‌نظران افزایش کیفیت تدریس معلم را به عنوان هدف کلی تربیت معلم مطرح کرده‌اند. اما درباره اینکه کیفیت تدریس معلم چیست و یا چگونه می‌توان آن را بهبود بخشید، نظرات متفاوتی ارائه شده است. تل¹ (2000؛ به نقل از ملایی نژاد، 1391)، در مقاله خود، ضمن اشاره به بحث‌ها و دیدگاه‌های مختلف در این زمینه، اظهار می‌دارد که بحث اصلی در زمینه کیفیت تدریس معلم، آمادگی معلمان است، لذا مسیری که معلمان قبل از ورود به کلاس (دوره‌های تربیت معلم) طی می‌کنند، بسیار مهم است. به گفته وی، همه در این باره توافق دارند که آماده‌سازی معلمان، نقش مهمی در توسعه کیفیت تدریس آنان دارد؛ بنابراین باید با معلمان در هر سطح و مرحله‌ای به عنوان یک متخصص حرفه‌ای رفتار کرد و برای تضمین کیفیت آموزش معلمان از ابتدا شاخص‌ها و صلاحیت‌هایی در نظر گرفته شود که در آن هم بر دانش محتوایی و هم بر روش‌های تدریس تاکید گردد. در سند تحول بنیادین آموزش و پرورش (1390، 47) نیز بر ایجاد انعطاف در برنامه‌های درسی تربیت معلم، متناسب با تحولات علمی و نیازهای نظام تعلیم و تربیت رسمی عمومی و به‌روزرسانی توانمندی‌های تخصصی معلمان و برنامه‌ریزی برای کارآموزی دانش‌معلمان در کنار تربیت معلم و بررسی نظریات جدید تعلیم و تربیت، تاکید شده است.

دایره گسترده معرفت بشری چنان انگاشته شده که لحظه به لحظه وسعت می‌یابد و به نظر می‌رسد ریاضیات در حرکت پرگاری که به این رشد و فزونی عینیت می‌بخشد، نقشی عمده دارد. دانشی که همواره در برنامه درسی همه کشورها شأنتی ویژه دارد و بسیاری آن را رمز موفقیت حرفه‌ای دانش‌آموزان و دارای رسالتی عظیم در پرورش توانایی‌های افراد و آماده‌سازی آنان برای زیستی هوشمندانه‌تر و خردمندانه‌تر دانسته‌اند؛ تا بدانجا که شورای ملی معلمان

ریاضی²، ریاضیات را بخشی از میراث فرهنگی بشر می‌داند و در سند خود تحت عنوان اصول و استانداردهای ریاضیات مدرسه‌ای³ (2000)، هدف اساسی از مطالعه و آموزش آن را آماده‌سازی دانش‌آموزان برای زندگی برشمرده است (رحیمی، طلایی، ریحانی و فردانش، 1396). ریاضیات و کاربردهای آن بخشی از زندگی روزانه و در جهت حل مشکلات زندگی در حوزه‌های مختلف به شمار می‌آید که دارای کاربردهای وسیع در فعالیت‌های متفاوت انسانی است. ریاضیات، موجب تربیت افرادی خواهد شد که در برخورد با مسائل بتوانند به طور منطقی استدلال کنند. وجه مهم ریاضی توانمندسازی انسان برای توصیف دقیق موقعیت‌های پیچیده، پیش‌بینی و کنترل وضعیت‌های ممکن مادی، طبیعی، اقتصادی و اجتماعی است (برنامه درسی ملی، 1391، 33). با توجه به نتایج ضعیف دانش‌آموزان دوره ابتدایی جمهوری اسلامی ایران در مطالعات بین‌المللی ریاضی مانند تیمز⁴ (مرکز ملی مطالعات بین‌المللی پرلز و تیمز، 1395)، از سال 1391 تغییرات اساسی در رویکرد، ساختار و محتوای کتاب‌های درسی ریاضی دوره ابتدایی کشورمان ایجاد شد. رویکرد کتاب‌های تازه نوشته شده ریاضی دوره ابتدایی از حافظه محوری به مفهوم محوری و فعالیت محوری تغییر یافته است. با توجه به تغییر رویکرد کتاب‌های درسی ریاضی در سال‌های اخیر، می‌توان گفت که معلمان و دانش‌معلمان آموزش ابتدایی بدون برخورداری از «دانش محتوایی تخصصی»⁵، توانمندی و صلاحیت لازم برای تدریس ریاضی در مدارس ابتدایی را نخواهند داشت.

بنا بر پژوهش‌های انجام شده در حوزه آموزش ریاضی، معلمان برای تدریس اثربخش ریاضی به دو نوع دانش محتوایی نیازمندند که عبارت‌اند از: دانش محتوایی عمومی⁶ و دانش محتوایی تخصصی. دانش محتوایی عمومی؛ دانش ریاضی و مهارتی است که در زمینه‌های مختلف مورد استفاده قرار می‌گیرد و همیشه ویژه تدریس ریاضیات نیست. این دانش شامل توانایی انجام محاسبات ریاضی، دانستن محتوایی

2. National Council of Teachers of Mathematics (NCTM)

3. Principles and Standards for School Mathematics

4. TIMSS

5. Specialized Content Knowledge (SCK)

6. Common Content Knowledge (CCK)

1. Tell

به نقل از جوهانس دوتیر^۹، (2013). در ایران، تاکنون پژوهشی که به طور مستقل و اختصاصی درباره دانش محتوایی تخصصی معلمان یا دانشجومعلم‌ان انجام شده باشد یافت نشد، اما تجربیات و مشاهدات پژوهشگر اول نوشتار حاضر به عنوان آموزشگر ریاضی در دانشگاه فرهنگیان از سال 1388 تاکنون، با معلمان دوره ابتدایی که به صورت ناپیوسته ادامه تحصیل می‌دادند و همچنین با دانشجومعلم‌ان رشته آموزش ابتدایی که به صورت پیوسته مشغول به تحصیل هستند، حاکی از سطح ضعیف و نامناسب «دانش محتوایی تخصصی» معلمان و دانشجومعلم‌ان در موضوعات مختلف ریاضی به ویژه در تقسیم کسرها^{۱۱} است. به دلیل اینکه در ریاضیات دوره ابتدایی، یاددهی و یادگیری تقسیم کسرها همواره برای دانش‌آموزان، دانشجومعلم‌ان و معلمان موضوعی سخت و چالش‌برانگیز بوده است (بولگار^{۱۲}، 2003؛ فلورس^{۱۳}، 2002؛ سودر، فیلیپ، آرمسترونگ و اسکاپل^{۱۴}، 1998؛ به نقل از اولانف^{۱۵}، 2011)، لذا موضوع تقسیم کسرها به عنوان «مطالعه موردی» برای این پژوهش انتخاب شد. همچنین از طریق نیازسنجی که با الگوی مسئله‌محوری به وسیله پژوهشگر اول این مقاله در سال 1398 در دانشگاه فرهنگیان انجام شد، «تقسیم کسرها» به عنوان چالش‌برانگیزترین موضوع آموزشی در ریاضیات دوره ابتدایی شناخته شد و موارد زیر به عنوان مشکلات و چالش‌های آموزشگران و دانشجومعلم‌ان در ارتباط با تقسیم کسرها شناسایی شدند:

بیشتر دانشجومعلم‌ان آموزش ابتدایی درک مفهومی خیلی ضعیفی از تقسیم کسرها داشتند؛
اغلب دانشجومعلم‌ان آموزش ابتدایی فقط می‌توانستند تقسیم دو کسر را با فرمول (الگوریتم) به دست آورند و قادر به توضیح معنا و مفهوم تقسیم کسرها نبودند.
اغلب دانشجومعلم‌ان قادر نبودند مسئله‌های معناداری برای تقسیم کسرها در حالت‌های مختلف طرح کنند.

که تدریس می‌شود، تشخیص پاسخ‌های نادرست دانش‌آموزان و همچنین توانایی به کارگیری صحیح نمادها و اصطلاحات ریاضی است (بال، تامس و فیلیپس^۱، 2008). به جرأت می‌توان گفت که معلمان و دانشجومعلم‌ان آموزش ابتدایی تنها با تکیه بر دانش محتوایی عمومی و بدون برخورداری از دانش محتوایی تخصصی؛ قادر به آموزش صحیح و اثربخش ریاضی در دوره ابتدایی نخواهند بود؛ بنابراین در کنار دانش محتوایی عمومی؛ یکی دیگر از دانش‌های خیلی ضروری و مورد نیاز برای معلمان که بتوانند به طور اثربخش ریاضیات را تدریس کنند، «دانش محتوایی تخصصی» است (بال و همکاران، 2008؛ اولانف^۲ و همکاران، 2014؛ جکسون^۳ و همکاران، 2016). دانش محتوایی تخصصی در آموزش ریاضی؛ دانش و مهارتی منحصر به فرد برای تدریس است. این دانش مخصوص تدریس معلمان است و در محاسبات روزمره و کاربردی مورد استفاده قرار نمی‌گیرد (بال و همکاران، 2008). در جدول 1 مؤلفه‌ها و جنبه‌های مختلف دانش محتوایی تخصصی در حوزه آموزش ریاضی از دیدگاه پژوهشگران مختلف گردآوری و ارائه شده است. هیل، روان و بال^۴ (2005)، به نقل از وایت‌هد و والکوویاک^۵ (2017) در پژوهشی به این نتیجه رسیدند که بین دانش محتوایی تخصصی معلمان و یادگیری دانش‌آموزان در ریاضی، رابطه مستقیمی وجود دارد. نتایج این پژوهش نشان داد که همبستگی قوی و معناداری بین دانش محتوایی تخصصی معلمان و کیفیت تدریس آنها به دانش‌آموزان وجود دارد. پژوهش‌های انجام شده نشان می‌دهد که دانش محتوایی تخصصی دانشجومعلم‌ان در درس ریاضی از کیفیت مطلوبی برخوردار نیست و بسیاری از دانشجومعلم‌ان در کشورهای مختلف در زمینه دانش محتوایی تخصصی دارای عملکرد نامطلوبی هستند (بال، 1990؛ تیروش و گریبر^۶، 1990؛ سیمون^۷، 1993؛ موبورن^۸، 2003؛ هیل^۹ و همکاران، 2008؛

1. Ball, Thames & Phelps
2. Olanof
3. Jakson
4. Hill, Rowan & Ball
5. Whitehead & Walkowiak
6. Tirosh & Greaber
7. Simon
8. Mewborn

9. Hill
10. Jóhannsdóttir
11. Division of Fractions
12. Bulgar
13. Flores
14. Sowder, Phillip, Armstrong & Schappelle
15. Olanoff

جدول 1. مؤلفه‌ها و ابعاد دانش محتوایی تخصصی در آموزش ریاضی از دیدگاه پژوهشگران

پژوهشگران	مؤلفه‌ها و ابعاد
جاسینتو و جاکوبسن ^۱ (2020)	دانش تفسیر خطاها و ظرفیت‌های دانش‌آموزان در ریاضی؛ رویکردهایی برای شناسایی مشکلات دانش‌آموزان در ریاضی؛ درک اشکال مختلف آموزش ریاضی فراتر از روش کتاب‌های درسی؛ استفاده عملی از مواد ملموس در آموزش ریاضی.
زمبات و بایرام ^۲ (2019)	دانش مورد نیاز برای مدیریت وظایف روزمره در آموزش ریاضی؛ پاسخگویی به سوالات دانش‌آموزان (چرایی؟)؛ ارزیابی راه‌حل‌های جایگزین دانش‌آموزان در ریاضی؛ ارائه مثال؛
دینگ و هفرنان ^۳ (2018)	ارائه بازنمایی‌های چندگانه؛ طرح پرسش‌های عمیق.
دباز، فلمر، رندولف و گونزالس ^۴ (2017)	به کارگیری زبان ریاضی؛ توانایی به کارگیری بازنمایی‌های چندگانه؛ توجیه الگوریتم‌های ریاضی.
دینگ ^۱ (2016)	استفاده از بازنمایی‌ها؛ استفاده از توضیحات برای مفاهیم و ایده‌های ریاضی؛ توضیح و توجیه ایده‌های ریاضی؛ پاسخ‌گویی به سوالات دانش‌آموزان؛ ارتباط بازنمایی‌ها به ایده‌های اساسی و بازنمایی‌های دیگر؛
هورل ^۵ (2013)	ارزیابی معقول بودن نظرات دانش‌آموزان؛ ارائه یا ارزیابی توضیحات ریاضی؛ استفاده از نمادها و زبان ریاضی و نقد روش‌های به کارگیری آنها؛ گزینش بازنمایی‌های مناسب برای اهداف خاص.
کارنو، روجاس، مونتس و فلورس ^۶ (2013)	درک عمیق از دانش ریاضی؛ درک معنای مفاهیم ریاضی؛ دانستن گام‌های مبهم در رویه‌ها و الگوریتم‌های ریاضی؛ آگاهی از ریشه و منشاء خطاهای ریاضی یادگیرندگان.
بیر و ریچ ^۷ (2011)	طراحی توضیحات دقیق ریاضی که برای یادگیرندگان مفید و قابل درک باشد؛ باز کردن دانش ریاضی به منظور معنادار کردن آن برای یادگیرندگان؛ استفاده از تعریف‌های ریاضی مناسب و قابل فهم برای یادگیرندگان؛ ارائه دقیق ایده‌های ریاضی؛
لین، چین و چیو ^۸ (2011)	بازنمایی بین یک مدل فیزیکی یا گرافیکی، نمادها، عمل‌های ریاضی و فرایندها؛ تفسیر و قضاوت‌های ریاضی‌وار و پداگوژیکی درباره سوالات، راه‌حل‌ها، مشکلات و بینش دانش‌آموزان (قابل پیش‌بینی و یا غیرمعمول)؛ توانایی پاسخ‌گویی خلاقانه به سوالات ریاضی دانش‌آموزان و علاقه‌مندی‌های آنان؛ توانایی طرح مسئله‌های جالب و مسئله‌های خلاقانه برای یادگیری دانش‌آموزان؛ ارائه توضیحات ریاضی برای قوانین و رویه‌های رایج در ریاضی؛ ایجاد، انتخاب و استفاده از بازنمایی‌های ریاضی به طور اثربخش و دقیق؛ توضیح و توجیه ایده‌های ریاضی یادگیرندگان.

1. Jacinto & Jakobsen
2. Zembat & Bayram
3. Ding & Heffernan
4. Diaz, Felmer, Randolph & González
5. Hurrell
6. Carreno, Rojas, Montes & Flores
7. Bair & Rich
8. Lin, Chin & Chiu

- بررسی و تحلیل اشتباهات و خطاهای دانش‌آموزان در ریاضی؛
 بررسی درستی یا نادرستی الگوریتم‌های غیراستاندارد در حالت کلی؛
 بال، تامس و فیلپس (2008) چگونگی انتخاب و استفاده موثر از بازنمایی‌ها؛
 چگونگی توضیح و توجیه ایده‌های ریاضی دانش‌آموزان؛
 آگاهی از مدل‌ها و تعبیرهای مختلف عمل‌های ریاضی (انواع تعبیرها برای عمل‌های جمع، تفریق، ضرب و تقسیم).
 هیل، بال و اسپچلینگ^۱ ارائه و بیان ایده‌های ریاضی به طور دقیق؛
 ارائه توضیحات ریاضی برای قوانین و رویه‌های ریاضی؛
 (2008) بررسی و درک روش‌ها و راه‌حل‌های غیرمعمول برای حل مسئله‌ها،
 نمایش اعداد و عملیات با روش‌های معنادار؛
 راینر^۲ (2007) توجیه و توضیح چرایی قوانین و الگوریتم‌های ریاضی؛
 تحلیل اینکه آیا راهبردها و راه‌حل‌های به کار گرفته شده به وسیله دانش‌آموزان از نظر ریاضی منطقی و معقول است یا خیر؟
 فراهم کردن موقعیت‌های مختلف حل مسئله در تدریس ریاضی؛
 نیلاس^۳ (2003) ترویج استفاده از موقعیت‌های طرح مسئله در تدریس ریاضی؛
 استفاده از بازنمایی‌های چندگانه برای حل یک مسئله؛
 طراحی فعالیت‌هایی مبتنی بر درک مفهومی و درک رویه‌ای.

کسرها، به دلیل قرار گرفتن این موضوع در تقاطع دو مفهوم انتزاعی ریاضی یعنی کسر^۴ و تقسیم^۵ است، زیرا هر کدام از این مفاهیم دارای مدل‌ها و تعبیرهای مختلفی در ریاضی هستند^۶ (سودر^۷ و همکاران، 1998؛ به نقل از اولانف، 2011). تقسیم کسرها به عنوان یکی از موضوعاتی است که به صورت الگوریتمی و فرمولی و با کمترین درک و فهم در مدارس ابتدایی تدریس می‌شود. دانش بسیاری از معلمان، دانش‌آموزان و دانشجومعلم‌ان در تقسیم کسرها، محدود به انجام دادن الگوریتم رایج ضرب و معکوس^۸ است (آرمسترنگ و بزوک^۹، 1995؛ کیرن^{۱۰}، 1993؛ سینین کورپ^{۱۱} و همکاران، 2002؛ به نقل از چن^{۱۲}، 2010). به عنوان نمونه در پژوهشی ایزدی و ریحانی در سال 1399 انجام دادند، یکی از دلایل اصلی مشکلات یادگیری دانش‌آموزان در یادگیری مفهوم کسر، ناکافی بودن دانش معلمان برای تدریس این مفهوم و محدود بودن درک آنها از کسرها به انجام بدون فهم رویه‌ها و الگوریتم‌ها مربوط

اغلب دانشجومعلم‌ان در حل مسئله‌هایی که مربوط به تقسیم کسرها بود، مشکلات اساسی داشتند. بسیاری از دانشجومعلم‌ان نمی‌توانستند مثال‌هایی کاربردی در زندگی واقعی برای تقسیم کسرها مطرح کنند. بیشتر دانشجومعلم‌ان نمی‌توانستند از راه‌حل‌ها، بازنمایی‌های چندگانه و مواد آموزشی مختلف در تقسیم کسرها استفاده کنند. بیشتر دانشجومعلم‌ان نگرش مثبتی به تقسیم کسرها نداشتند و اعتماد به نفس آنها درباره یاددهی یادگیری تقسیم کسرها پایین بود. تقریباً همه آموزشگران ریاضی و دانشجومعلم‌ان از مدل‌های تقسیم کسرها اطلاعی نداشتند. تقریباً همه آموزشگران و دانشجومعلم‌ان از بدفهمی‌هایی که در تقسیم کسرها وجود داشت، اطلاعی نداشتند.

با توجه به نیازسنجی انجام شده و مشکلات و چالش‌هایی که آموزشگران و دانشجومعلم‌ان در ارتباط با تقسیم کسرها داشتند؛ بنابراین موضوع تقسیم کسرها برای این پژوهش انتخاب شد. تقسیم کسرها در ریاضی به شکل تقسیم دو کسر $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ تعریف می‌شود: $(\frac{a}{b} \div \frac{c}{d})$. یکی از دلایل اصلی پیچیدگی و چالش‌برانگیز بودن آموزش تقسیم

4. Fraction

5. Division

6. مدل‌های تقسیم در ریاضی عبارت‌اند از: مدل بخشی و مدل پیمانه‌ای. تعبیرهای کسر در ریاضی عبارت‌اند از: جزء کل، نسبت، نرخ، عملگر، تقسیم (خارج قسمت) و اندازه.

7. Sowder

8. Invert and Multiply

9. Armstrong & Bezuk

10. Kieren

11. Sinincrop

12. Chen

1. Hill, Ball & Schilling

2. Rayne

3. Nillas

نظر گرفته شد. به دلیل اینکه الگوی برنامه درسی توسعه دانش محتوایی تخصصی با روش کیفی طراحی شد و به کمک یافته‌های کیفی؛ ابزاری در قالب پرسش‌نامه محقق ساخته برای اعتبارسنجی الگوی پیشنهادی تدوین شد؛ بنابراین طرح پژوهش حاضر، اکتشافی با مدل تدوین طبقه‌بندی است. در بخش کیفی پژوهش، از روش مطالعه موردی⁵ استفاده شد و توسعه دانش محتوایی تخصصی دانشجومعلمانی آموزش ابتدایی دانشگاه فرهنگیان در تقسیم کسرها⁶ به عنوان «مورد» بررسی شد.

در گام اول بخش کیفی، منابع و پژوهش‌های مرتبط با دانش محتوایی تخصصی در آموزش تقسیم کسرها مورد بررسی قرار گرفتند. انتخاب منابع و پژوهش‌ها، به صورت نمونه‌گیری هدفمند از نوع ملاکی بود. ملاک‌های انتخاب منابع عبارت بودند از معتبر بودن و مرتبط بودن آنها با موضوع پژوهش. بر این اساس 61 منبع و پژوهش انجام شده بین سال‌های 1986 تا 2020 به عنوان نمونه انتخاب شدند و محتوای آنها مورد بررسی قرار گرفت. نمونه‌گیری در این بخش تا زمانی انجام شد که داده‌ها به حد اشباع رسیدند، یعنی داده‌های جدید به دست آمده حاوی مؤلفه جدیدی در ارتباط با توسعه دانش محتوایی تخصصی در آموزش تقسیم کسرها نبودند. در گام دوم؛ به منظور کشف مؤلفه‌های بیشتر و درک عمیق‌تری از ابعاد دانش محتوایی تخصصی در آموزش تقسیم کسرها، از روش مصاحبه استفاده شد. در این گام، مصاحبه‌هایی نیمه ساختاریافته با متخصصان آموزش ریاضی و آموزشگران ریاضی دانشگاه فرهنگیان به عنوان افراد متخصص و صاحب‌نظر در ارتباط با موضوع پژوهش انجام شد. قبل از انجام مصاحبه‌ها، یافته‌های جدول 1 (مؤلفه‌ها و ابعاد دانش محتوایی تخصصی در آموزش ریاضی) در اختیار مصاحبه‌شوندگان قرار گرفت تا یک درک کلی نسبت به ماهیت دانش محتوایی تخصصی داشته باشند. مصاحبه‌های نیمه‌ساختاریافته با متخصصان در قالب دو سوال پاسخ باز زیر شکل گرفت:

سوال اول) به نظر شما دانش محتوایی تخصصی در آموزش تقسیم کسرها شامل چه ابعاد و مؤلفه‌هایی است؟
سوال دوم) به نظر شما چه راهکارهایی باعث توسعه دانش محتوایی تخصصی دانشجومعلمانی در آموزش تقسیم کسرها می‌شود؟

می‌شد. لئونگ¹ (2013) در پژوهشی نشان داد بسیاری از دانشجومعلمانی درک کاملی از معنای تقسیم کسرها ندارند. به گفته وی، آگاهی نداشتن از معنا و مفهوم تقسیم کسرها باعث می‌شود تا دانشجومعلمانی با روش‌های الگوریتمی به دانش‌آموزانی که در آینده معلم آنها خواهند شد، دانش‌آموزان‌شان را به سمت حافظه‌محوری و یادگیری‌های سطحی سوق دهند. با توجه به اهمیت و ضرورت دانش محتوایی تخصصی آموزش تقسیم کسرها برای معلمان و دانشجومعلمانی و نبود برنامه، سرفصل و چارچوب مشخصی برای آموزش و توسعه آن در برنامه درسی ریاضی کشورمان، پژوهشگران در پژوهش حاضر تصمیم گرفتند تا به صورت مطالعه موردی، الگویی برای توسعه دانش محتوایی تخصصی در آموزش تقسیم کسرها طراحی نموده و آن را اعتبارسنجی کنند؛ بنابراین پژوهش حاضر با عنایت به سوالات زیر انجام شد:

1. الگوی برنامه درسی توسعه دانش محتوایی تخصصی دانشجومعلمانی آموزش ابتدایی در تقسیم کسرها چگونه است؟
 2. الگوی طراحی شده برای توسعه دانش محتوایی تخصصی دانشجومعلمانی در آموزش تقسیم کسرها به چه میزان دارای اعتبار است؟

روش‌شناسی پژوهش

این پژوهش جزء پژوهش‌های کاربردی است که با روش ترکیبی² انجام شده است. با توجه به اینکه به‌کارگیری روش‌های کیفی و کمی به صورت ترکیبی در مقایسه با به‌کارگیری هر یک از این دو روش به طور مجزا، به درک کامل‌تر و استنتاج‌های صحیح‌تری از مسائل پژوهشی منجر می‌شود؛ بنابراین روش ترکیبی به عنوان یک روش پژوهشی کامل و جامع، برای پژوهش حاضر انتخاب گردید.

با توجه به هدف پژوهش که در ابتدا کشف مؤلفه‌های توسعه دانش محتوایی تخصصی در تقسیم کسرها بود؛ بنابراین طرح اکتشافی³ با مدل تدوین طبقه‌بندی⁴ برای این پژوهش در

1. Leung
2. Mixed Method
3. Exploratory Design
4. Taxonomy Development Model

جدول 2. مؤلفه‌های توسعه دانش محتوایی تخصصی در آموزش تقسیم کسرها (به دست آمده از مطالعه اسنادی)

1. **درک مدل‌های تقسیم کسرها**
مدل پیمانه‌ای؛ مدل بخشی؛ مدل نرخ واحد؛ مدل تقسیم به عنوان معکوس ضرب؛ مدل تقسیم به عنوان معکوس حاصلضرب دکارتی.
2. **آگاهی از بسته دانش در تقسیم کسرها**
درک مفهوم کسر؛ درک معنای تقسیم؛ درک معنای ضرب کسرها؛ درک معنای ضرب و تقسیم اعداد صحیح؛ درک معنای عمل‌های معکوس.
3. **توانایی تحلیل ایده‌های دانش‌آموزان در تقسیم کسرها**
توجه ایده‌ها و راهبردهای درست یا نادرست دانش‌آموزان در تقسیم کسرها؛ بررسی درستی الگوریتم‌های غیراستاندارد دانش‌آموزان در حالت کلی؛ توانایی پاسخ‌گویی به سوالات دانش‌آموزان در ارتباط با تقسیم کسرها؛
4. **شناسایی، تحلیل و رفع بدفهمی‌های دانش‌آموزان در تقسیم کسرها**
تشخیص بدفهمی‌های دانش‌آموزان در تقسیم کسرها (الگوریتمی، شهودی، مبتنی بر دانش رسمی)؛ بررسی و تحلیل دلایل و نوع بدفهمی‌های دانش‌آموزان در تقسیم کسرها؛ ارائه راهکارهای مناسب در جهت رفع بدفهمی‌های دانش‌آموزان در تقسیم کسرها.
5. **توانایی مرتبط کردن مدل‌ها و تعبیرهای مختلف تقسیم کسرها به یکدیگر (موقعیت‌های دنیای واقعی، کلامی، ملموس، تصویری و نمادین)**
حل مسائل تقسیم کسر با مدل‌ها و تعبیرهای مختلف؛ بحث درباره تقسیم کسرها و راه‌حل‌های استفاده شده به صورت کلامی، ملموس، تصویری و نمادین.
6. **درک تأثیرات عمل تقسیم بر مقسوم و مقسوم علیه در تقسیم کسرها**
درک اینکه در تقسیم کسرها، پاسخ همیشه کوچک‌تر نمی‌شود. درک اینکه در ضرب کسرها، پاسخ همیشه بزرگ‌تر نمی‌شود.
7. **توانایی به کارگیری تقسیم کسرها در موقعیت‌های دنیای واقعی**
تشخیص موقعیت‌های دنیای واقعی مرتبط با تقسیم کسرها؛ طراحی موقعیت‌های دنیای واقعی برای تقسیم کسرها.
8. **درک معنای و زبان ریاضی مرتبط با نمادهای تقسیم کسرها**
درک اینکه نماد تقسیم کسر می‌تواند معانی مختلفی داشته باشد؛ توصیف معانی مختلف نماد تقسیم کسر با استفاده از زبان ریاضی.
9. **درک روابط بین تقسیم و عمل‌های دیگر در تقسیم کسرها**
رابطه بین تقسیم و ضرب کسرها (تقسیم عکس عمل ضرب)؛ رابطه بین تقسیم و تفریق کسرها (تقسیم به معنای تفریق‌های متوالی)
10. **توانایی ساختن و تجزیه اعداد کسری و استفاده از عمل‌های ریاضی برای حل مسئله‌های تقسیم کسرها**
استفاده از قانون جابجایی در تقسیم کسرها؛ استفاده از قانون بخشی در تقسیم کسرها.
11. **توانایی استفاده از الگوریتم‌های محاسباتی برای تقسیم کسرها و توانایی توضیح مفهومی درباره علت و چرایی الگوریتم‌ها**
الگوریتم ضرب و معکوس؛ الگوریتم تقسیم صورت‌ها بر تقسیم مخرج‌ها؛ الگوریتم مخرج مشترک.
12. **توانایی انتخاب و استفاده موثر از بازنمایی‌های تصویری در تقسیم کسرها**
بازنمایی تصویری تقسیم عدد بر کسر؛ بازنمایی تصویری تقسیم کسر بر عدد؛ بازنمایی تصویری تقسیم کسر بر کسر.
13. **توانایی طرح مسئله در تقسیم کسرها**
طرح مسئله برای تقسیم عدد بر کسر؛ طرح مسئله برای تقسیم کسر بر عدد؛ طرح مسئله برای تقسیم کسر بر کسر.
14. **آموزش از طریق حل مسئله در تقسیم کسرها**
توانایی طرح مثال‌های جالب و مسئله‌های خلاقانه برای یادگیری دانش‌آموزان؛ طراحی فعالیت‌های کلاسی برای آموزش تقسیم کسرها.
15. **طراحی فعالیت‌های مبتنی بر دانش مفهومی و دانش رویه‌ای در آموزش تقسیم کسرها**
انجام فعالیت‌هایی که مبتنی بر دانش مفهومی و رویه‌ای باشد؛ ایجاد تعادل بین دانش مفهومی و دانش رویه‌ای در تقسیم کسرها.
16. **استفاده از توضیحات دقیق و زبان ریاضی مرتبط با تقسیم کسرها**
17. **باز کردن ایده‌ها و مفاهیم مرتبط با تقسیم کسرها به منظور معنادار کردن آن برای یادگیرندگان**
18. **توانایی استدلال و برقراری ارتباطات مفهومی در تقسیم کسرها**
استدلال و برقراری ارتباط بین تقسیم عدد بر کسر و مدل پیمانه‌ای تقسیم؛ استدلال و برقراری ارتباط بین تقسیم کسر بر عدد و مدل بخشی تقسیم؛ استدلال و برقراری ارتباط بین تقسیم کسر بر کسر با مسئله‌های مشابه و ساده‌تر.

آموزشگران ریاضی، از مصاحبه دهم به بعد، تکرار در اطلاعات دریافتی مشاهده شد اما برای اطمینان تا مصاحبه چهاردهم ادامه یافت. در بخش مصاحبه با متخصصان آموزش ریاضی، بعد از سه مصاحبه اول، اطلاعات دریافت شده به اشباع رسید ولی برای اطمینان از اشباع داده‌ها، بررسی و تحلیل داده‌ها تا مصاحبه پنجم ادامه پیدا کرد. گردآوری داده‌ها در بخش کیفی

تعداد مشارکت کنندگان در این بخش 19 نفر بودند (14 نفر آموزشگر ریاضی دانشگاه فرهنگیان و پنج نفر متخصص آموزش ریاضی). در بخش نمونه‌گیری از آموزشگران ریاضی دانشگاه فرهنگیان و متخصصان آموزش ریاضی، نمونه‌گیری به صورت هدفمند از نوع ملاکی تا رسیدن به اشباع داده‌ها انجام شد. ملاک‌های انتخاب مشارکت کنندگان در این بخش عبارت بودند از: علاقه‌مندی به مشارکت در پژوهش و داشتن اطلاعات کافی درباره آموزش تقسیم کسرها. در هنگام مصاحبه با

در مرحله اول (کدگذاری اولیه)، ابتدا متن تمامی مصاحبه‌ها و داده‌های کیفی مورد تحلیل و بررسی قرار گرفت و نکات کلیدی آنها شناسایی شد و 58 نکته کلیدی به دست آمد. در ادامه، تمامی نکات کلیدی به دست آمده که از نظر معنایی مشابه هم بودند، در دسته‌های مجزایی قرار گرفتند (کدگذاری ثانویه). در مرحله سوم از ترکیب و تلفیق هر دسته از کدهای ثانویه‌ای که از نظر معنایی حول یک محور مشترک قرار داشتند، مفاهیم³ توسعه دانش محتوایی تخصصی در آموزش تقسیم کسرها به دست آمدند (23 مفهوم). در آخرین مرحله، با توجه به طیف‌های مفهومی به دست آمده و با مقوله‌ای کردن⁴ آنها، در نهایت هشت مقوله⁵ به عنوان مؤلفه‌های اصلی توسعه دانش محتوایی تخصصی در آموزش تقسیم کسرها از دیدگاه متخصصان آموزش ریاضی و آموزشگران ریاضی دانشگاه فرهنگیان شناسایی شدند. جزئیات و نحوه کدگذاری‌های

با روش‌های مطالعه اسنادی¹ (بررسی منابع معتبر و پژوهش‌های انجام شده) و مصاحبه‌های نیمه‌ساختاریافته با متخصصان و صاحب نظران انجام شد. تحلیل داده‌های به دست آمده در بخش مطالعه اسنادی از طریق تعیین واژگان کلیدی (تقسیم کسرها و دانش محتوایی تخصصی در تقسیم کسرها)، فیش برداری، تقلیل و تنظیم داده‌ها، طبقه‌بندی و استفاده از جداول مفهومی انجام شد و در نهایت 18 مؤلفه اصلی به عنوان مؤلفه‌های توسعه دانش محتوایی تخصصی در آموزش تقسیم کسرها استخراج شد (جدول 2).

همچنین تحلیل داده‌های کیفی در بخش مصاحبه‌ها از طریق طبقه‌بندی، سازمان‌دهی، مفهوم‌سازی و مقوله‌پردازی داده‌ها (کدگذاری) انجام شد. در این بخش با روش کدگذاری باز²، داده‌های کیفی گردآوری شده از طریق مصاحبه‌های نیمه‌ساختاریافته با متخصصان، در چهار مرحله کدگذاری شدند.

جدول 3. مؤلفه‌های توسعه دانش محتوایی تخصصی در آموزش تقسیم کسرها (استخراج شده از مصاحبه‌های نیمه ساختاریافته)

مقاله‌های اصلی	مفاهیم	کدگذاری ثانویه
یادگیری مفهومی و عمیق	یادگیری مفهومی و عمیق	<p>U دانشجوعلمدان باید علاوه بر دانستن الگوریتم تقسیم کسرها، درک مفهومی و عمیقی از تقسیم کسرها داشته باشند.</p> <p>دانشجوعلمدان آموزش ابتدایی فقط نباید تقسیم کسرها را با فرمول و الگوریتم یاد بگیرن، بلکه باید روش‌های مفهومی تقسیم کسرها رو هم بلد باشن، چون در کتاب‌های ریاضی دوره ابتدایی به روش‌های مفهومی در تقسیم کسرها بیشتر تاکید شده است.</p> <p>U دانشجوعلمدان باید ابتدا با روش‌های مفهومی تقسیم کسرها آشنا شوند و به کمک روش‌های مفهومی، الگوریتم تقسیم کسرها را به دست آورند.</p>
برخورداری از دانش مفهومی و دانش روزنه‌ای در آموزش تقسیم کسرها	آموزش مفهومی و آموزش الگوریتمی	<p>U آموزشگران باید روش‌های مفهومی و روش‌های الگوریتمی تقسیم کسرها را به دانشجوعلمدان آموزش دهند.</p> <p>U آموزش تقسیم کسرها بدون گفتن روش‌های مفهومی، منجر به یادگیری سطحی دانشجوعلمدان خواهد شد.</p> <p>من خودم قبلاً برای آموزش تقسیم کسرها، ابتدا الگوریتم رایج "ضرب و معکوس" رو در حالت کلی به کمک روابط ریاضی اثبات می‌کردم و سپس به کمک این الگوریتم، مثال‌های عددی و حالت‌های خاص رو توضیح می‌دادم. ولی الان روشم خیلی تغییر کرده، یعنی اول الگوریتم رو نمی‌گم و قبل از گفتن الگوریتم، سعی می‌کنم با مثال‌های ملموس، از طریق مفهوم بخشی، دانشجوعلمدان الگوریتم تقسیم کسرها رو درک کنن.</p>
آگاهی از بسته‌های دانش در آموزش تقسیم کسرها	دانشستن مفهوم کسر و مفهوم تقسیم آگاهی از بسته‌های دانش در آموزش تقسیم کسرها	<p>U قبل از آموزش باید مطمئن شویم که دانشجوعلمدان درک درستی از مفهوم کسر که یک مفهوم انتزاعی هست، دارند.</p> <p>U حتماً قبل از آموزش تقسیم کسرها باید مطمئن بشیم که دانشجوعلمدان مدل‌های مختلف تقسیم (بخشی و پیمانه‌ای) رو بلد هستن.</p> <p>احتمالاً لازم هست که دانشجوعلمدان از پیش‌نیازهای لازم برای تقسیم کسرها، آگاهی داشته باشند. مثل مفهوم کسر، ضرب کسرها، کسرها مساوی با یک کسر و ...</p>
مسئله‌ها و مثال‌های مشابه و ساده‌تر	مسئله‌ها و مثال‌های مشابه و ساده‌تر	<p>U برای شروع آموزش تقسیم کسرها باید از مسئله‌های مشابه و ساده‌تر استفاده کرد، مثلاً بهتر است قبل از آموزش تقسیم عدد بر کسر، مسئله مشابهی از تقسیم عدد بر عدد مطرح کنیم.</p> <p>U من همیشه برای آموزش تقسیم کسرها، از مثال‌های ملموس و ساده استفاده می‌کنم. مثلاً کسرهایی را به کار می‌برم که نشان دادن آنها با شکل، آسان باشد.</p>
رعایت سلسله مراتب مفهومی در آموزش تقسیم کسرها	تدریس از آسان به سخت	<p>U در آموزش تقسیم کسرها بهتر است تدریسمان را از آسان به سخت سازمان‌دهی کنیم. یعنی مثال‌هایی گفته بشه که درک و فهمش برای دانشجوعلمدان راحت باشه.</p> <p>U من همیشه موقع تدریس تقسیم کسرها، اول تقسیم عدد به کسر، بعد تقسیم کسر به عدد و در آخر تقسیم کسر بر کسر رو توضیح می‌دهم، چون مفهوم تقسیم کسر بر کسر نسبت به دو حالت دیگه سخت‌تره.</p>
توالی منطقی در تدریس	توالی منطقی در تدریس	<p>U در موقع تدریس، مدرس باید بتونه بین حالت‌های مختلف تقسیم کسر رابطه برقرار کنه که فهم اون برای دانشجوعلمدان راحت باشه.</p> <p>U من برای تقسیم کسر بر کسر دو حالت در نظر می‌گیرم. اول تقسیم کسرها با مخرج‌های مساوی رو آموزش می‌دم و بعد تقسیم کسرها با مخرج نامساوی رو به کمک قاعده‌ای که برای تقسیم کسرها با مخرج مساوی به دست آمده، توضیح می‌دم.</p>

2. Concepts
3. Categorizing
4. Category

1. Documentary Research
1. Open Coding

داده‌های کیفی در بخش مصاحبه‌ها، در جدول 3 آمده است.

<p>مثال‌ها و مسئله‌های ملموس</p>	<p>آموزشگران ریاضی حتماً باید از مثال‌ها و مسئله‌های ملموس و قابل فهم برای آموزش تقسیم کسرها برای دانشجویان استفاده کنند و صرفاً به دنبال قاعده گویی نباشند.</p> <p>در تدریس تقسیم کسرها با روش مفهومی من خودم موقع تدریس سعی می‌کنم مثال‌هایی کاربردی بگم. یعنی مثال‌هایی رو می‌گم که فقط حالت نمادین و محاسباتی نداشته باشن و معنادار باشن. مثال‌هایی رو می‌گم که واقعاً در زندگی روزمره هم اتفاق بیفته. دانشجویان باید بتوانند با روش‌هایی مثل رسم شکل، توضیحات کلامی و غیره تقسیم کسرها رو به دست بیارن.</p> <p>آموزش تقسیم کسرها با رسم شکل واقعاً یک راهبرد خیلی عالی و قابل درک هست. آموزش تقسیم کسرها با رسم شکل، مخصوصاً برای تقسیم کسر بر عدد و تقسیم عدد بر کسر، یک راهبرد خیلی خوب و قابل درک هست.</p> <p>خیلی وقت‌ها یک تقسیم رو با روش نمادین به دانشجویها توضیح دادم، خوب متوجه نشدن. ولی وقتی برای همون تقسیم، شکل رسم کردم، تعداد خیلی زیادی متوجه شدن. مثلاً برای آموزش تقسیم دو کسر با مخرج مساوی، وقتی با رسم شکل گفته می‌شه، دانشجویها خیلی راحت متوجه می‌شن که در نهایت قاعده تقسیم دو کسر با مخرج‌های مساوی چی هست.</p> <p>من وقتی تقسیم کسرها رو آموزش می‌دم، مثلاً برای تقسیم عدد بر کسر از شکل‌های گسسته و برای تقسیم کسر بر عدد از شکل‌های پیوسته و برای تقسیم کسر بر کسر از مسئله‌های کلامی استفاده می‌کنم.</p> <p>بعضی وقت‌ها استفاده از دست‌سازه یا تصویر به درک تقسیم کسرها خیلی کمک می‌کنه. مثلاً می‌شه در تقسیم کسر بر عدد، تقسیم عدد بر کسر و تقسیم دو کسر وقتی که کسر اول بیشتر از کسر دوم هست و کسرها بر هم بخش پذیرند از دست‌سازه یا رسم شکل هم استفاده کرد.</p>
<p>آموزش از طریق حل مسئله</p>	<p>آموزش تقسیم کسرها باید از طریق حل مسئله و فعالیت‌های معنادار در کلاس انجام بشه.</p> <p>من همیشه موقع آموزش تقسیم کسرها، ابتدا یک مسئله طرح می‌کنم و به دانشجویها می‌گم که خودشون به دنبال پیدا کردن راه حل مسئله باشن! این طوری وقتی خودشون مسئله رو به زبان ریاضی می‌نویسن می‌بینن که مسئله به یکی از سه حالت تقسیم کسرها تبدیل شده.</p> <p>به نظرم آموزش تقسیم کسرها فقط با اثبات الگوریتم آن در حالت کلی، بی‌معنی است و ایجاد انگیزه نمی‌کنه. حل مسئله‌های معنادار و انجام فعالیت‌هایی که منجر به کشف الگوریتم تقسیم کسرها بشه راهبردی بسیار مفید و عالی است.</p> <p>دانشجویان باید بتونن برای تقسیم کسرها در حالت‌های مختلف مسئله طرح کنند.</p> <p>مسئله‌هایی که برای هر کدام از حالت‌های تقسیم کسرها مطرح می‌شه باید متناسب با عبارت ریاضی داده شده باشه که می‌خواهیم حلش کنیم.</p>
<p>استفاده از مهارت‌های فرآیندی در آموزش تقسیم کسرها</p>	<p>به نظر من طرح مسئله‌های معنادار برای تقسیم کسرها قبل از حل، باعث میشه که دانشجویها متوجه بشن که تقسیم کسرها فقط در ریاضی اتفاق نمی‌افته و در زندگی روزمره هم از تقسیم کسرها استفاده می‌شه.</p> <p>من خودم در تدریس تقسیم کسرها معمولاً از روش‌های فعال در کلاس استفاده می‌کنم، مثل بحث‌های کلاسی، شنیدن نظرات موافق و مخالف دانشجویان و ...</p> <p>در چند سالی که به دانشجویان ابتدایی تقسیم کسرها رو آموزش می‌دم، در کلاس‌هایی که دانشجویان معلمان در مورد تقسیم کسرها بحث و گفتگو می‌کنن، یادگیری‌شون خیلی بهتر و عمیق‌تر شده.</p> <p>باید فضای کلاس طوری باشه که دانشجویان بتوانند نظرات و ایده‌های خودشان رو حتی اگر نادرست هم باشه، توضیح بدن. واقعاً تقسیم کسرها از جمله مباحثی هست که حتماً باید موقع آموزش اون بحث و گفتگو بشه، چون درک اون نسبت به سایر موضوعات ریاضی دوره ابتدایی که من تا حالا تدریس کردم، انتزاعی‌تره.</p> <p>در آموزش تقسیم کسرها بهتر است بین مراحل تقسیم کسرها و مفاهیمی که دانشجویان قبلاً آموخته‌اند، ارتباط برقرار کنیم. به نظرم اگه دانشجویان تقسیم اعداد معمولی رو به صورت مفهومی بلد باشن، تقسیم کسرها رو هم می‌تونن خوب یاد بگیرن. در آموزش تقسیم کسرها باید بین روش‌های مفهومی و روش‌های الگوریتمی ارتباط برقرار کنیم.</p> <p>من برای گفتن الگوریتم ضرب و معکوس در تقسیم کسرها، ابتدا تقسیم دو کسر با مخرج‌های مساوی رو می‌گم و به کمک قاعده‌ای که برای این حالت به دست می‌آد تقسیم کسرها با مخرج‌های نامساوی را توضیح می‌دم که با این روش می‌تونیم به الگوریتم کلی "ضرب و معکوس" برسیم.</p>
<p>اثبات و استدلال</p>	<p>دانشجویان علاوه بر دانستن الگوریتم تقسیم کسرها، باید چرایی الگوریتم تقسیم کسرها را هم بلد باشن. یعنی باید قادر باشن الگوریتم تقسیم کسرها رو خودشون با استدلال و در حالت کلی به دست بیارن، البته اگه خودشون بخوان در کلاس به بچه‌های ابتدایی تدریس کنن این کار لازم نیست.</p> <p>من خودم موقع آموزش تقسیم کسرها با روش مفهومی برای هر حالت، با استدلال جلو می‌رم. چون موقع آموزش مفهومی تقسیم کسرها نمی‌تونیم از الگوریتم تقسیم کسرها استفاده کنیم و الگوریتم بعد از مفهوم بخشی باید به دست بیاد.</p> <p>من معمولاً همیشه یکی از سوالاتی که از دانشجویان معلمان در تقسیم کسرها می‌پرسم اینه که آیا در تقسیم دو تا کسر هم میشه از قاعده‌ای مشابه با ضرب کسرها استفاده کرد؟ یعنی میشه در تقسیم دو تا کسر، صورت کسرها رو به هم و مخرج کسرها رو به هم تقسیم کرد؟ معمولاً بعد از طرح این سوال، دانشجویان با اثبات و استدلال، درستی یا نادرستی سوال طرح شده رو بررسی می‌کنن.</p>

	دانشجومعلمان باید از دلایل و روش‌های مقابله با اشتباهاتی که دانش‌آموزان ممکن است در تقسیم کسرها مرتکب شوند، آگاهی داشته باشند و این کار هم نیاز به این داره که دانشجومعلمان تقسیم کسرها رو خودشون خوب و مفهومی یاد گرفته باشن.
دانش درباره بدفهمی‌های بدفهمی‌ها یادگیرندگان در تقسیم کسرها	من همیشه بخشی از تدریس در آموزش ریاضی ابتدایی و همچنین در تدریس تقسیم کسرها، معرفی برخی از بدفهمی‌های دانش‌آموزان است که با مطالعه مقالات مجلات، همایش‌ها و کنفرانس‌های آموزش ریاضی یا سوالات آزمون تیمز و یا از طریق تجربیات کلاسی معلمان و همکاران دیگر با این بدفهمی‌ها آشنا شده‌ام، معمولاً نمونه‌ای از بدفهمی‌هایی که بچه‌ها مرتکب میشن رو به دانشجومعلمان می‌گم و علت بدفهمی‌ها در کلاس تحلیل و بررسی می‌شه.
	خیلی از دانشجومعلمان فکر می‌کنن که برای هر حالت از تقسیم کسرها می‌تونن به راحتی شکل رسم کنن. مثلاً اغلب اوقات سعی می‌کنن برای تقسیمی مثل $\frac{2}{4} \div \frac{1}{5}$ شکلی مشابه با $\frac{1}{5} \times \frac{2}{4}$ یا مشابه با حالت‌های دیگر تقسیم کسرها شکل رسم کنن و معمولاً هم دچار اشتباه می‌شن. در بعضی از کلاس‌هایی که تقسیم کسرها رو تدریس کرده‌ام دانشجومعلمانی بودن (به ویژه دانشجومعلمانی که رشته دبیرستانی‌شون علوم انسانی بوده) که فکر می‌کردن تقسیم کسرها هم مثل ضرب کسرها، خاصیت جابجایی داره. مثلاً $3 \div \frac{1}{2} = 3 = 3 \div \frac{1}{2}$
مواد آموزشی	بهرتر است برای آموزش مفهومی و درک تقسیم کسرها از دست‌سازه‌هایی مانند تلیق‌های شفاف استفاده کرد. به ویژه این روش در تقسیم کسر بر کسر در حالت‌های خاص، بسیار مفید و جالب هست.
	مطالعه بعضی از مقالات و کتاب‌های آموزشی و همچنین دیدن روش‌های مختلف تدریس در زمینه تقسیم کسرها باعث می‌شه تا خود مدرس نگاه عمیقی به تقسیم کسرها داشته باشه.
	یکی از روش‌هایی که من در آموزش تقسیم کسرها در کلاس به کار می‌گیرم روش پرسش و پاسخ است. مثلاً از دانشجویان می‌پرسم که برای تقسیم $\frac{3}{4} \div \frac{1}{4}$ مسئله طرح کنن، سپس پاسخ‌های داده شده در کلاس مورد نقد و بررسی قرار می‌گیره.
پرسش و پاسخ	یکی از روش‌هایی که معمولاً در آموزش تقسیم کسرها به کار می‌برم، پرسیدن سوالات پاسخ باز هست. مثلاً از دانشجویها می‌خوام یک عدد صحیح و یک کسر یکن که تقسیم اونها 4 بشه. این روش واقعاً باعث یادگیری عمیق میشه.
آگاهی از روش‌های یاددهی یادگیری در تقسیم کسرها	من در تدریس تقسیم کسرها برای ایجاد انگیزه در دانشجومعلمان اولین سوالی که می‌پرسم اینه که چرا در تقسیم کسرها، کسر اول رو به معکوس کسر دوم ضرب می‌کنیم! (چون این قاعده رو معمولاً همه دانشجومعلمان از قبل می‌دونن ولی علتش رو اغلب نمی‌دونن) و سپس پاسخ‌های دانشجویان رو گوش می‌دم.
توضیح دادن	بهرتر است برخی از موارد مهم در تدریس تقسیم کسرها توسط مدرسین توضیح داده بشه، مثلاً آموزش تقسیم کسر بر کسر با روش مفهومی زمانی که کسرها مخرج‌های نابرابری داشته باشند، برای دانشجومعلمان مبهم است که در چنین مواقعی بهتر است که جزئیات اون توسط مدرس خوب توضیح داده بشه.
	در آموزش تقسیم کسرها، نکات مهم رو خودم توضیح می‌دم. برخی اوقات نکاتی هستند که حتماً باید خوب باز بشن چون معمولاً این نکات و توضیحات رو نمیشه در کتاب‌ها پیدا کرد. به عنوان مثال آموزش مفهومی کسر بر عدد از مواردی است که هنگام محاسبه جواب، نیاز به توضیح داره مثل جایی که باید از خاصیت جابجایی ضرب کسرها استفاده بشه.
ارزشیابی از آموخته‌ها و مشکلات یادگیری	بهرتر است در هر مرحله از آموزش تقسیم کسرها، از آموخته‌ها و مشکلات یادگیری دانشجومعلمان آگاهی پیدا کنیم.
	طرح مسئله برای تقسیم کسرها همیشه آسون نیست. در تمام سال‌هایی که تقسیم کسرها رو به دانشجومعلمان آموزش داده‌ام، معمولاً طرح مسئله برای حالت تقسیم کسر بر کسر مخصوصاً وقتی که کسر اول کوچکتر از کسر دوم باشه، یا وقتی که دو تا کسر برهم بخش پذیر نباشن، برای دانشجومعلمان واقعاً چالش برانگیز و مبهم بوده است.
آگاهی از روش‌های ارزشیابی در آموزش چند بعدی تقسیم کسرها	آزمون‌هایی که برای ارزشیابی دانشجومعلمان طراحی می‌شه باید چند بعدی باشه: مثلاً هم دانش مفهومی آنها را بسنجیم و هم دانش رویه‌ای شان را. از آن‌ها بخواهیم برای هر کدام از حالت‌های تقسیم کسر مسئله طرح کنن، با روش‌های مفهومی و الگوریتمی جواب تقسیم کسرها را به دست آورن و ...
	من در آزمون پایانی سوالاتی که فقط جنبه محاسباتی داشته باشن طرح نمی‌کنم. مثلاً می‌گم برای $5 \div \frac{2}{3}$ یک مسئله معنادار طرح کنید. سپس با رسم شکل مسئله رو حل کنید و توضیح بدید که چرا جواب این تقسیم برابر $\frac{1}{5} \times \frac{2}{3}$ می‌شه.
ارزشیابی مرحله‌ای و عملکردی	ارزشیابی دانشجومعلمان فقط به صورت آزمون کتبی در پایان ترم نباید باشه. من همیشه بخشی از نمره دانشجومعلمان در تقسیم کسرها رو به مشارکت و فعالیت‌های کلاسی اونها در کلاس اختصاص می‌دم.
	بعد از آموزش تقسیم کسرها، معمولاً سوالاتی رو برای دانشجومعلمان مطرح می‌کنم و کسانی که درست جواب بدن، امتیاز مثبت براشون در نظر می‌گیرم.
امتحان کردن جواب با روش‌های مختلف استفاده از راه‌حل‌های استفاده از چنگانه در آموزش تقسیم کسرها	دانشجومعلمان باید بتوانند علاوه بر محاسبه تقسیم کسرها، درست بودن جواب‌ها را با روش‌های مختلف امتحان کنن. مثلاً بتوانند با استفاده از رابطه بین عمل‌های ضرب و تقسیم از درستی پاسخ‌ها و راه‌حل‌شان مطمئن بشن.
	باید مطمئن شد که دانشجومعلمان در پایان دوره آموزشی، می‌توانند از روش‌های مختلف (چه الگوریتمی و چه مفهومی)، تقسیم کسرها را به دست آورن.

مؤلفه‌های مشابه، 23 مؤلفه به عنوان مؤلفه‌های توسعه دانش محتوایی تخصصی در آموزش تقسیم کسرها به دست آمد (پیوست 1). بر اساس مؤلفه‌های شناسایی شده، برای

در ادامه بخش کیفی پژوهش، مؤلفه‌های شناسایی شده حاصل از مطالعه اسنادی (جدول 2) و مصاحبه‌ها (جدول 3) جمع‌شدن و پس از حذف مؤلفه‌های تکراری و ادغام

جدول 4. مؤلفه‌های نهایی توسعه دانش محتوایی تخصصی در آموزش تقسیم کسرها (تلفیق مطالعه اسنادی و مصاحبه‌ها)

1. درک مدل‌های تقسیم کسرها	مدل پیمانه‌ای؛ مدل بخشی؛ مدل نرخ واحد؛ مدل تقسیم به عنوان معکوس ضرب؛ مدل تقسیم به عنوان معکوس حاصلضرب دکارتی.
2. آگاهی از بسته دانش در تقسیم کسرها	درک مفهوم کسر؛ درک معنای تقسیم؛ درک معنای ضرب کسرها؛ درک معنای ضرب و تقسیم اعداد صحیح؛ درک معنای عمل‌های معکوس.
3. توانایی تحلیل ایده‌های دانش‌آموزان در تقسیم کسرها	توجه ایده‌ها و راهبردهای درست یا نادرست دانش‌آموزان در تقسیم کسرها؛ بررسی درستی الگوریتم‌های غیراستاندارد دانش‌آموزان در حالت کلی؛ توانایی پاسخ‌گویی به سوالات دانش‌آموزان در ارتباط با تقسیم کسرها؛ شناسایی، تحلیل و رفع بدفهمی‌های دانش‌آموزان در تقسیم کسرها
4. تشخیص انواع بدفهمی‌های دانش‌آموزان در تقسیم کسرها (الگوریتمی، شهودی، مبتنی بر دانش رسمی)؛ بررسی و تحلیل دلایل و نوع بدفهمی‌های دانش‌آموزان در تقسیم کسرها؛ ارائه راهکارهای مناسب در جهت رفع بدفهمی‌های دانش‌آموزان در تقسیم کسرها.	توانایی مرتبط کردن مدل‌ها و تعبیرهای مختلف تقسیم کسرها به یکدیگر (موقعیت‌های دنیای واقعی، کلامی، ملموس، تصویری و نمادین).
5. حل مسائل تقسیم کسر با مدل‌ها و تعبیرهای مختلف؛ بحث درباره تقسیم کسرها و راه حل‌های استفاده شده به صورت کلامی، ملموس، تصویری و نمادین.	4. درک تأثیرات عمل تقسیم بر مقسوم و مقسوم علیه در تقسیم کسرها
6. درک تأثیرات عمل تقسیم بر مقسوم و مقسوم علیه در تقسیم کسرها	درک اینکه در تقسیم کسرها، پاسخ همیشه کوچکتر نمی‌شود؛ درک اینکه در ضرب کسرها، پاسخ همیشه بزرگ‌تر نمی‌شود.
7. توانایی به کارگیری تقسیم کسرها در موقعیت‌های دنیای واقعی	5. توانایی به کارگیری تقسیم کسرها در موقعیت‌های دنیای واقعی
8. تشخیص موقعیت‌های دنیای واقعی مرتبط با تقسیم کسرها؛ طراحی موقعیت‌های دنیای واقعی برای تقسیم کسرها.	6. درک معنای و زبان ریاضی مرتبط با نمادهای تقسیم کسرها
9. درک معنای و زبان ریاضی مرتبط با نمادهای تقسیم کسرها	درک اینکه نماد تقسیم کسر می‌تواند معانی مختلفی داشته باشد؛ توصیف معانی مختلف نماد تقسیم کسر با استفاده از زبان ریاضی.
10. درک روابط بین تقسیم و عمل‌های دیگر در تقسیم کسرها	7. درک روابط بین تقسیم و عمل‌های دیگر در تقسیم کسرها
11. رابطه بین تقسیم و ضرب کسرها (تقسیم عکس عمل ضرب)؛ رابطه بین تقسیم و تفریق کسرها (تقسیم به معنای تفریق‌های متوالی)	8. توانایی استفاده از الگوریتم‌های محاسباتی برای تقسیم کسرها و توانایی توضیح مفهومی درباره علت و چرایی الگوریتم‌ها
12. توانایی استفاده از الگوریتم‌های محاسباتی برای تقسیم کسرها و توانایی توضیح مفهومی درباره علت و چرایی الگوریتم‌ها	9. الگوریتم ضرب و معکوس؛ الگوریتم تقسیم اعشاری؛ الگوریتم مخرج مشترک.
13. توانایی انتخاب و استفاده موثر از بازنمایی‌ها در آموزش تقسیم کسرها	10. بازنمایی‌های چندگانه تقسیم عدد بر کسر؛ بازنمایی‌های چندگانه تقسیم کسر بر کسر.
14. بازنمایی‌های چندگانه تقسیم عدد بر کسر؛ بازنمایی‌های چندگانه تقسیم کسر بر کسر.	11. توانایی طرح مسئله در آموزش تقسیم کسرها
15. توانایی طرح مسئله در آموزش تقسیم کسرها	طرح است برای تقسیم عدد بر کسر؛ طرح است برای تقسیم کسر بر عدد؛ طرح است برای تقسیم کسر بر کسر.
16. طرح است برای تقسیم عدد بر کسر؛ طرح است برای تقسیم کسر بر عدد؛ طرح است برای تقسیم کسر بر کسر.	12. آموزش از طریق حل است
17. آموزش از طریق حل است	توانایی طرح مثال‌های جالب و است‌های خلاقانه برای یادگیری دانش‌آموزان؛ طراحی فعالیت‌های کلاسی برای آموزش تقسیم کسرها.
18. توانایی طرح مثال‌های جالب و است‌های خلاقانه برای یادگیری دانش‌آموزان؛ طراحی فعالیت‌های کلاسی برای آموزش تقسیم کسرها.	13. طراحی فعالیت‌های مبتنی بر دانش مفهومی و دانش رویه‌ای در آموزش تقسیم کسرها
19. طراحی فعالیت‌های مبتنی بر دانش مفهومی و دانش رویه‌ای در آموزش تقسیم کسرها	انجام فعالیت‌هایی که مبتنی بر دانش مفهومی باشد؛ انجام فعالیت‌هایی که مبتنی بر دانش رویه‌ای باشد؛ ایجاد تعادل بین دانش مفهومی و دانش رویه‌ای در تقسیم کسرها.
20. استفاده از توضیحات دقیق و زبان ریاضی مرتبط با تقسیم کسرها	14. استفاده از توضیحات دقیق و زبان ریاضی مرتبط با تقسیم کسرها
21. باز کردن ایده‌ها و مفاهیم مرتبط با تقسیم کسرها به منظور معنادار کردن آن برای یادگیرندگان	15. باز کردن ایده‌ها و مفاهیم مرتبط با تقسیم کسرها به منظور معنادار کردن آن برای یادگیرندگان
22. توانایی استدلال و برقراری ارتباطات مفهومی در تقسیم کسرها	16. استدلال و برقراری ارتباط بین تقسیم عدد بر کسر و مدل پیمانه‌ای تقسیم؛ استدلال و برقراری ارتباط بین تقسیم کسر بر عدد و مدل بخشی تقسیم؛ استدلال و برقراری ارتباط بین تقسیم کسر بر کسر با است‌های مشابه و ساده‌تر.
23. استدلال و برقراری ارتباط بین تقسیم عدد بر کسر و مدل پیمانه‌ای تقسیم؛ استدلال و برقراری ارتباط بین تقسیم کسر بر عدد و مدل بخشی تقسیم؛ استدلال و برقراری ارتباط بین تقسیم کسر بر کسر با است‌های مشابه و ساده‌تر.	17. سلسله مراتب مفهومی در یاددهی و یادگیری تقسیم کسرها
24. سلسله مراتب مفهومی در یاددهی و یادگیری تقسیم کسرها	تدریس از موارد ملموس به موارد انتزاعی
25. تدریس از موارد ملموس به موارد انتزاعی	18. استفاده از راه حل‌های چندگانه در تقسیم کسرها
26. استفاده از راه حل‌های چندگانه در تقسیم کسرها	امتحان کردن درست بودن جواب تقسیم کسرها با روش‌های مختلف؛ محاسبه تقسیم کسرها با روش‌های مختلف.
27. امتحان کردن درست بودن جواب تقسیم کسرها با روش‌های مختلف؛ محاسبه تقسیم کسرها با روش‌های مختلف.	19. روش‌های یاددهی یادگیری در آموزش تقسیم کسرها
28. روش‌های یاددهی یادگیری در آموزش تقسیم کسرها	فعالیت محور؛ مفهوم محور؛ اکتشافی؛ پرسش و پاسخ؛ توضیح دادن؛ بحث و گفتگو؛ تمرین و تکرار؛ استفاده از مواد ملموس؛ طرح است.
29. فعالیت محور؛ مفهوم محور؛ اکتشافی؛ پرسش و پاسخ؛ توضیح دادن؛ بحث و گفتگو؛ تمرین و تکرار؛ استفاده از مواد ملموس؛ طرح است.	20. روش‌های ارزشیابی در آموزش تقسیم کسرها
30. روش‌های ارزشیابی در آموزش تقسیم کسرها	ارزشیابی از آموخته‌ها و مشکلات یادگیری؛ ارزشیابی چند بعدی؛ ارزشیابی مرحله‌ای و عملکردی؛ ارزشیابی آغازین و پایانی.
31. ارزشیابی از آموخته‌ها و مشکلات یادگیری؛ ارزشیابی چند بعدی؛ ارزشیابی مرحله‌ای و عملکردی؛ ارزشیابی آغازین و پایانی.	

ضروری است ضروری نیست) بین 15 نفر از متخصصان آموزش ریاضی و آموزشگران ریاضی دانشگاه فرهنگیان توزیع شد.

اعتباریابی و تأیید مؤلفه‌ها، 23 مؤلفه شناسایی شده در قالب پرسش‌نامه محقق ساخته (1) (پیوست 2) با 23 گویه و با مقیاس لیکرت سه گزین‌های (کاملاً ضروری است تا حدودی

توصیفی از نوع پیمایشی⁵ بود. جامعه آماری برای اعتبارسنجی الگوی برنامه درسی در بخش کمی شامل دو گروه مختلف بود: گروه اول شامل 22 نفر از متخصصان آموزش ریاضی و آموزشگران ریاضی دانشگاه فرهنگیان بودند و گروه دوم شامل 85 نفر از معلمان دوره ابتدایی بودند که در سه سال اخیر در پایه‌های پنجم و ششم ابتدایی موضوع تقسیم کسرها را تدریس کرده و از دانش قابل قبولی در تقسیم کسرها برخوردار بودند. انتخاب معلمان در یکی از مراکز استانی شمال غرب کشور به روش هدفمند انجام شد.

برای جمع‌آوری داده‌های کمی به منظور اعتبارسنجی الگوی پیشنهادی، از پرسش‌نامه محقق ساخته (2) که بر اساس الگوی طراحی شده تدوین شد، استفاده گردید. این پرسش‌نامه حاوی 13 گویه در ارتباط با عناصر الگوی پیشنهادی بود (پیوست 4). الگوی برنامه درسی طراحی شده (جدول 5) به همراه پرسش‌نامه محقق ساخته شماره 2 (پیوست 4)، جهت اعتبارسنجی الگو در اختیار متخصصان آموزش ریاضی، آموزشگران ریاضی دانشگاه فرهنگیان و معلمان دوره ابتدایی قرار گرفت تا نظرات خود را در ارتباط با متناسب بودن عناصر الگوی طراحی شده با توسعه دانش محتوایی تخصصی دانشجو معلمان در تقسیم کسرها، مشخص کنند. گویه‌های مربوط به این پرسش‌نامه بر اساس طیف لیکرتی از نمره 1 (خیلی کم) تا نمره 5 (خیلی زیاد) نمره‌گذاری شد و برای تحلیل داده‌ها از روش «تحلیل عاملی تاییدی»⁶ استفاده شد.

برای بررسی روایی ابزارهای اندازه‌گیری (پرسش‌نامه‌های محقق ساخته 1 و 2) از روایی محتوایی و صوری استفاده شد. برای این منظور از نظرات استادان راهنما و مشاور و هفت نفر از متخصصانی که در زمینه موضوع پژوهش از تجربه و تخصص کافی بهره‌مند بودند، جهت بازنگری و اصلاح گویه‌ها استفاده شد. همچنین به منظور بررسی پایایی ابزارهای اندازه‌گیری (پرسش‌نامه‌های محقق ساخته 1 و 2) از آزمون آلفای کرونباخ استفاده شد. پایایی پرسش‌نامه محقق ساخته (1) برابر 0/88 و پرسش‌نامه

پس از دریافت پرسش‌نامه‌ها اعتبار هر یک از گویه‌ها با استفاده از روش آماری نسبت روایی محتوا¹ مورد بررسی قرار گرفت (پیوست 3). به دلیل اینکه حداقل مقدار نسبت روایی محتوا برای داشتن اعتبار هر گویه در نظرخواهی از 15 نفر متخصص، 0/49 است، لذا گویه‌های 10 و 21 از فهرست مؤلفه‌های نهایی دانش محتوایی تخصصی آموزش تقسیم کسرها حذف شدند (مقدار نسبت روایی گویه 10 برابر 0/33 و گویه 21 برابر 0/46 بود) و در نهایت 21 مؤلفه به عنوان مؤلفه‌های نهایی دانش محتوایی تخصصی در آموزش تقسیم کسرها به دست آمدند (جدول 4).

روایی مؤلفه‌های شناسایی شده برای توسعه دانش محتوایی تخصصی در آموزش تقسیم کسرها (جدول 4) از طریق روش‌های مثلثی کردن² (استفاده از دو روش برای گردآوری داده‌های کیفی شامل: مصاحبه‌ها و مطالعه اسنادی)، بررسی به وسیله مشارکت کنندگان³ (قرار دادن یافته‌های جدول 4 در اختیار مشارکت کنندگان در پژوهش و آگاهی از نظرات آنها) و بررسی به وسیله افراد خارج از پژوهش⁴ (قرار دادن یافته‌های جدول 4 در اختیار افراد متخصص مانند آموزشگران ریاضی و دانشجویان دوره دکتری آموزش ریاضی که در پژوهش مشارکت نداشتند و آگاهی از نظرات آنها). به دلیل اجماع کلی متخصصان، روایی یافته‌های به دست آمده در جدول 4 تایید شد. همچنین با بررسی مجدد و دقیق یافته‌هایی که از طریق مطالعه اسنادی به دست آمده بودند (جدول 2) و همچنین بررسی مجدد متن مصاحبه‌ها و نکات کلیدی آنها و کدهای اختصاص داده شده به مفاهیم و مقوله‌های اصلی در مراحل چهارگانه کدگذاری متن مصاحبه‌ها (کدگذاری اولیه، کدگذاری ثانویه و ایجاد مفاهیم و مقوله‌ها) (جدول 3)، پایایی و قابل اعتماد بودن یافته‌های بخش کیفی پژوهش تایید شد.

در بخش کمی پژوهش، به منظور اعتبارسنجی الگوی طراحی شده از نظرات تعداد بیشتری از متخصصان و افراد صاحب‌نظر استفاده شد. روش پژوهش در بخش کمی،

1. Content Validity Ratio
2. Triangulate
3. Member Checking
4. Peer Review

5. Survey

6. Confirmatory Factor Analysis

دانشجومعلمان در تقسیم کسرها طراحی شد. در این بخش پژوهشگر با مشورت و نظرخواهی از استادان راهنما و مشاور به عنوان متخصصان برنامه‌ریزی درسی و پنج نفر دیگر از استادان حوزه برنامه‌ریزی درسی، الگوی پیشنهادی را تدوین و طراحی کرد. با توجه به اینکه عناصر هدف، محتوا و فعالیت‌های یادگیری، روش‌های یاددهی یادگیری و روش‌های ارزشیابی به عنوان مهمترین عناصر در هر برنامه درسی محسوب می‌شوند، لذا چارچوب الگوی پیشنهادی در این پژوهش نیز بر اساس این چهار عنصر، تدوین و طراحی شد. طراحی الگوی پیشنهادی در این بخش طی چند مرحله انجام گرفت. در این مرحله پژوهشگر با طرح سوال، مصاحبه‌های عمیق و جمع‌بندی نظرات متخصصان درباره مؤلفه‌ها و جزئیات هر کدام از عناصر الگوی برنامه درسی پیشنهادی و ارائه خلاصه‌ای از نظرات به افراد مشارکت کننده، با توجه به اطلاعات جدید و دیدگاه‌های به دست آمده و انتقادات و پیشنهادهایی که متخصصان درباره نظرات همدیگر داشتند؛ در نهایت پژوهشگر به یک جمع‌بندی و همسویی کلی درباره نظرات تمام متخصصان در مورد ساختار و

(2) برابر 0/91 به دست آمد که این اعداد، بیانگر پایایی پرسش‌نامه‌های محقق ساخته بودند.

یافته‌های پژوهش

سوال اول پژوهش: الگوی برنامه درسی توسعه دانش محتوایی تخصصی دانشجویان آموزش ابتدایی در تقسیم کسرها چگونه است؟

بر اساس 21 مؤلفه نهایی دانش محتوایی تخصصی در آموزش تقسیم کسرها (جدول 4) و از طریق مشورت و مصاحبه با هفت نفر از متخصصان برنامه‌ریزی درسی و آموزش ریاضی با مدل پژوهش دلفی¹، در نهایت الگوی پیشنهادی در قالب عناصر اهداف، محتوا و فعالیت‌های یادگیری، روش‌های یاددهی یادگیری و روش‌های ارزشیابی؛ تدوین و طراحی شد که جزئیات این الگو در جدول 5 ارائه شده است. بر اساس یافته‌های حاصل از مطالعه اسنادی و مصاحبه‌ها (جدول 4)، در آخرین مرحله بخش کیفی، الگوی پیشنهادی به منظور توسعه دانش محتوایی تخصصی

جدول 5. الگوی برنامه درسی توسعه دانش محتوایی تخصصی دانشجویان آموزش ابتدایی در تقسیم کسرها

اهداف کلی: توسعه دانش محتوایی تخصصی دانشجویان آموزش ابتدایی در آموزش تقسیم کسرها.	اهداف
اهداف شناختی: در سطح دانش؛ دانشجویان باید بتوانند مفاهیم و اصطلاحات مربوط به تقسیم کسرها، انواع تعبیرهای کسر، انواع مدل‌های تقسیم اعداد صحیح و کسری، حالت‌های مختلف تقسیم کسرها، انواع الگوریتم‌های تقسیم کسرها و انواع بدفهمی‌های دانش‌آموزان در تقسیم کسرها را نام ببرند. در سطح درک و فهم؛ دانشجویان باید بتوانند مفاهیم و اصطلاحات مربوط به تقسیم کسرها، انواع تعبیرهای کسر، انواع مدل‌های تقسیم اعداد صحیح و کسری، حالت‌های مختلف تقسیم کسرها، انواع الگوریتم‌های تقسیم کسرها و انواع بدفهمی‌های دانش‌آموزان در تقسیم کسرها را توضیح دهند. در سطح کاربرد؛ دانشجویان باید بتوانند از تقسیم کسرها در حل مسائل واقعی استفاده کنند، با روش‌های مفهومی و الگوریتمی، است‌های مبتنی بر تقسیم کسرها را حل کنند، از انواع مدل‌های تقسیم کسرها در حل مسائل مربوطه استفاده کنند، با روش‌های الگوریتمی و مفهومی، عبارت‌های ریاضی تقسیم کسرها را محاسبه کنند، بتوانند تقسیم کسرها را با روش‌های نمادین و تصویری نشان دهند و قادر باشند برای هر یک از حالت‌های تقسیم کسرها، مثال بزنند. در سطح تجزیه و تحلیل؛ دانشجویان باید بتوانند ارتباط روش‌های الگوریتمی و روش‌های مفهومی و همچنین ایده‌ها و بدفهمی‌های دانش‌آموزان در تقسیم کسرها را تحلیل کنند. در سطح ترکیب؛ دانشجویان باید بتوانند درباره تقسیم کسرها است‌های معنادار طرح کنند، بتوانند به کمک روش‌های مفهومی، الگوریتم‌های تقسیم کسرها را به دست آورند و قادر باشند الگوریتم‌های تقسیم کسرها را در حالت کلی اثبات کنند. در سطح ارزشیابی؛ دانشجویان باید بتوانند موقعیت‌ها و است‌های مرتبط با تقسیم کسرها را تشخیص دهند، بتوانند در آینده میزان یادگیری دانش‌آموزان از تقسیم کسرها را ارزیابی کنند، نقاط ضعف و قوت دانش‌آموزان در تقسیم کسرها را ارزشیابی کنند، درباره صحت و اعتبار و همچنین نادرستی مباحث و ایده‌های مرتبط با تقسیم کسرها قضاوت کنند و روش‌ها و راهبردهای موجود برای تقسیم کسرها را مقایسه و آنها را نقد کنند.	اهداف مهارتی: دانشجومعلمان بتوانند در آینده با راه‌حل‌های چندگانه (الگوریتمی و مفهومی) و مدل سازی، تقسیم کسرها را آموزش دهند. بتوانند از مواد آموزشی مختلف (مانند دست‌سازه‌ها، بازی‌های آموزشی، تلق‌های شفاف و ...) در تدریس کسرها به دانش‌آموزان استفاده کنند. بتوانند برای حالت‌های مختلف تقسیم کسرها، است‌های واقعی و معنادار و است‌های پاسخ باز طرح کنند. بتوانند در یاددهی و یادگیری تقسیم کسرها از مهارت‌های فرآیندی (حل است، اثبات و استدلال، ارتباطات مفهومی، ارتباطات کلامی و بازنمایی‌ها) استفاده کنند و بتوانند بدفهمی‌های دانش‌آموزان را در تقسیم کسرها شناسایی، تحلیل و راهکارهایی برای رفع آنها ارائه دهند.
	اهداف نگرشی: دانشجومعلمان باید برای یادگیری و یاددهی تقسیم کسرها به دانش‌آموزان از اعتماد به نفس لازم برخوردار باشند. برای یادگیری و یاددهی تقسیم کسرها به دانش‌آموزان اضطراب و نگرانی نداشته باشند و نسبت به اثربخشی خودشان به منظور آموزش تقسیم کسرها به دانش‌آموزان نگرش مثبتی داشته باشند.

محتوا فعالیت‌های یادگیری

آشنایی دانشجومعلمان با حالت‌های مختلف تقسیم کسرها (تقسیم عدد به عدد، تقسیم کسر بر عدد و تقسیم کسر بر کسر)؛ آشنایی دانشجومعلمان با انواع مدل‌های تقسیم کسرها (پیمانه‌ای، بخشی، نرخ واحد، معکوس ضرب و معکوس ضرب دکارتی). آشنایی و شناخت دانشجومعلمان از مدل‌های بدفهمی‌های دانش‌آموزان در تقسیم کسرها (بدفهمی‌های الگوریتمی بدفهمی‌های شهودی بدفهمی‌های مبتنی بر دانش رسمی) و ارائه راهکارهای عملی برای رفع این نوع از بدفهمی‌ها. آشنایی دانشجومعلمان با الگوریتم‌های موجود در تقسیم کسرها و روش اثبات آنها (الگوریتم ضرب و معکوس، الگوریتم تقسیم صورت‌ها و تقسیم مخرج‌ها و الگوریتم مخرج مشترک). آشنایی دانشجومعلمان با روش‌های مفهومی به دست آوردن تقسیم کسرها (طرح است، مدل‌سازی، به کارگیری مهارت‌های فرایندی شامل: حل است، اثبات و استدلال، ارتباطات مفهومی، ارتباطات کلامی، بازنمایی‌ها). آشنایی دانشجومعلمان با بسته دانش در تقسیم کسرها (درک مفهوم واحد، درک مفهوم و تعبیرهای مختلف کسر، درک معنای ضرب کسرها و درک عمل‌های معکوس). به کارگیری مواد آموزشی و دست‌سازهای مختلف در یادگیری تقسیم کسرها توسط دانشجومعلمان.

روش‌های یاددهی یادگیری

روش‌های یاددهی یادگیری دانشجومعلمان در آموزش تقسیم کسرها باید ترکیبی از روش‌های: فعالیت محور، مفهوم محور، توضیحی تحلیلی، اکتشافی، بحث‌های گروهی و مشارکتی، طرح است و حل است، پرسش و پاسخ، استفاده از راه‌حل‌های چندگانه، طراحی فعالیت‌های مبتنی بر دانش مفهومی و دانش روبه‌ای، آموزش روش‌های مفهومی در تقسیم کسرها، آموزش روش‌های الگوریتمی در تقسیم کسرها، ارائه مثال‌هایی از دنیای واقعی در تقسیم کسرها، استفاده از مواد آموزشی مختلف، استفاده از بازنمایی‌های چندگانه و تمرین و تکرار باشد.

ارزشیابی از دانشجومعلمان در آموزش تقسیم کسرها باید ترکیبی از ارزشیابی‌های آغازین، تکوینی و پایانی باشد. ارزشیابی‌های آغازین می‌توانند در قالب آزمون‌های کتبی کوتاه پاسخ، پاسخ باز، توضیحی تحلیلی، چند گزینه‌ای، صحیح غلط و کامل کردن برای شناخت میزان درک دانشجومعلمان از مفهوم تقسیم کسرها در ابتدای آموزش انجام شود. ارزشیابی‌های تکوینی می‌توانند در قالب گفتگوهای کلاسی، طرح است‌های چالش برانگیز، ارائه مثال‌هایی از بدفهمی‌های دانش‌آموزان در تقسیم کسرها و تحلیل دانشجومعلمان از این نوع بدفهمی‌ها، ارائه سوالات و است‌هایی از حالت‌های مختلف تقسیم کسرها در طول فرایند آموزش انجام شود. ارزشیابی پایانی می‌تواند در قالب سوالات و است‌هایی در حیطه دانش، درک و فهم، کاربرد، تجزیه و تحلیل، ترکیب و ارزشیابی و همچنین متناسب با اهداف مهارتی و نگرشی طراحی شوند. به عنوان مثال:

سطح دانش:

انواع مدل‌های تقسیم کسرها را نام ببرید.

الگوریتم‌هایی را که در تقسیم کسرها مورد استفاده قرار می‌گیرد، نام ببرید.

سطح فهمیدن:

مدل پیمانه‌ای در تقسیم کسرها را توضیح دهید.

بدفهمی‌های مبتنی بر دانش رسمی در تقسیم کسرها را توضیح دهید.

سطح کاربرد:

مساحت یک استخر مستطیل شکل $\frac{8}{15}$ کیلومتر مربع و عرض آن $\frac{2}{3}$ کیلومتر است. طول این استخر چند کیلومتر است؟

برای درست کردن نوعی شیرینی، $\frac{3}{4}$ پیمانه شکر برای هر شیرینی نیاز است. با 6 پیمانه شکر چند شیرینی می‌توان درست کرد؟

سطح تجزیه و تحلیل:

مدل بخشی و مدل پیمانه‌ای در تقسیم کسرها چه تفاوتی دارند؟

دانش‌آموزی حاصل عبارت $\frac{3}{4} \div \frac{1}{4}$ را از طریق تقسیم صورت‌ها بر هم و تقسیم مخرج‌ها بر هم انجام داد $\frac{3+1}{4+4}$ و جواب 3 را به دست آورد. آیا روش این دانش‌آموز درست است؟

سطح ترکیب:

برای عبارت $\frac{3}{4} \div \frac{1}{3}$ است معاداری طرح کنید.

درستی الگوریتم زیر را نشان دهید:

$$\frac{1}{4} \div \frac{2}{3} = \frac{1}{4} \times \frac{3}{2}$$

سطح ارزشیابی:

به نظر شما چرا الگوریتم "ضرب و معکوس" نسبت به الگوریتم‌های دیگر در تقسیم کسرها، بیشتر مورد استفاده قرار می‌گیرد؟ آیا می‌توان جواب تقسیم هر دو کسر را با الگوریتم "تقسیم صورت‌ها به هم و تقسیم مخرج‌ها به هم" به دست آورد یعنی:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$$

سوالات متناسب با اهداف مهارتی:

حاصل عبارت زیر را با دو روش مفهومی و الگوریتمی به دست آورید:

$$\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$$

دانش‌آموزی در امتحان برای تقسیم مقابل چنین نوشته است: $\frac{1}{4} \div \frac{3}{5}$

"نمی‌توانم این تقسیم را انجام دهم چون $\frac{3}{5}$ از $\frac{1}{4}$ بیشتر است، لذا نمی‌توان عدد کوچکتر را به عدد بزرگتر تقسیم کرد". چه راهکاری به این دانش‌آموز ارائه می‌دهید تا بدفهمی او در تقسیم کسرها رفع شود؟

سوالات متناسب با اهداف نگرشی:

آیا شما «تقسیم کسرها» را طوری یاد گرفته‌اید که بتوانید به راحتی آن را در مدرسه برای دانش‌آموزان آموزش دهید؟ چرا؟

آیا شما نسبت به یاددهی یادگیری «تقسیم کسرها» اضطراب و نگرانی دارید؟ توضیح دهید.

سؤال دوم پژوهش: الگوی طراحی شده برای توسعه‌ی

دانش محتوایی تخصصی دانشجومعلمان در آموزش تقسیم

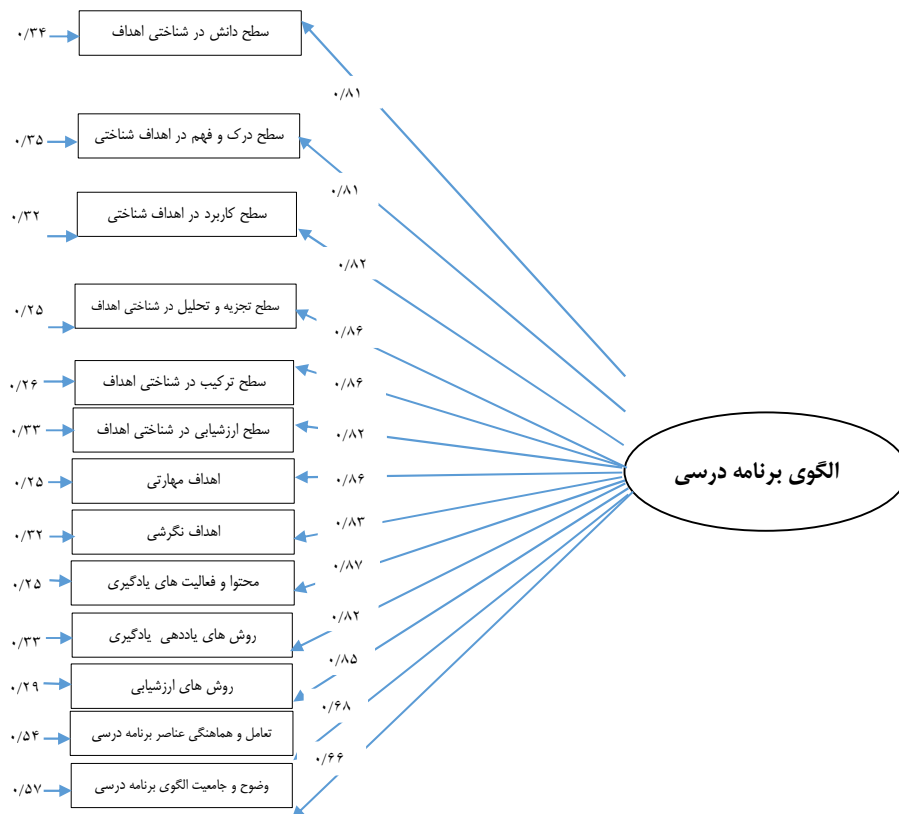
کسرها به چه میزان دارای اعتبار است؟

جزئیات هر کدام از عناصر الگوی برنامه‌ی درسی پیشنهادی

رسید و الگوی پیشنهادی طراحی گردید (جدول 5).

با بار عاملی 0/85 نیز به ترتیب تبیین کننده معنادار این متغیر هستند. همچنین عناصر دیگر نظیر روش‌های یاددهی یادگیری، اهداف شناختی در سطح دانش، درک و فهم، کاربرد و ارزشیابی؛ اهداف نگرشی؛ تعامل و هماهنگی عناصر برنامه‌درسی و وضوح و جامعیت برنامه‌درسی نیز به ترتیب به عنوان تبیین کننده‌های معنادار این مدل تحلیل و بررسی

جهت بررسی اعتبار الگوی برنامه‌درسی توسعه دانش محتوایی تخصصی که مشتمل بر 13 مؤلفه (گویه) بود، از تحلیل عاملی تاییدی مرتبه اول استفاده شد. اطلاعات شکل 1 مدل تحلیل عاملی تاییدی را در حالت بار عاملی (ضرایب استاندارد شده) نشان می‌دهد (خروجی‌های تحلیل عاملی در پیوست 5 است).



Chi-square=89/43 , df=56 , p-value=0/00301 , RMSEA=0/043

شکل 1. تحلیل عاملی تاییدی مرتبه اول در حالت تخمین استاندارد

شدند.

بر اساس نتایج تحلیل عاملی تاییدی مرتبه اول در حالت ضرایب معناداری، مقادیر همه آماره‌های باقیمانده در مدل در سطح اطمینان 95 درصد معنادار هستند (قدر مطلق همه مقادیر بیشتر از 1/96 است). نتایج تحلیل در جدول 6 به همراه مقادیر پایایی ترکیبی و میانگین واریانس استخراج شده، ذکر شده است.

همان طور که نتایج در شکل 1 نشان می‌دهد، مقادیر بار عاملی تمام ابعاد بیشتر از 0/4 است؛ بنابراین مدل اندازه‌گیری، مدلی همگن است و مقادیر بارهای عاملی، مقادیر قابل قبولی هستند.

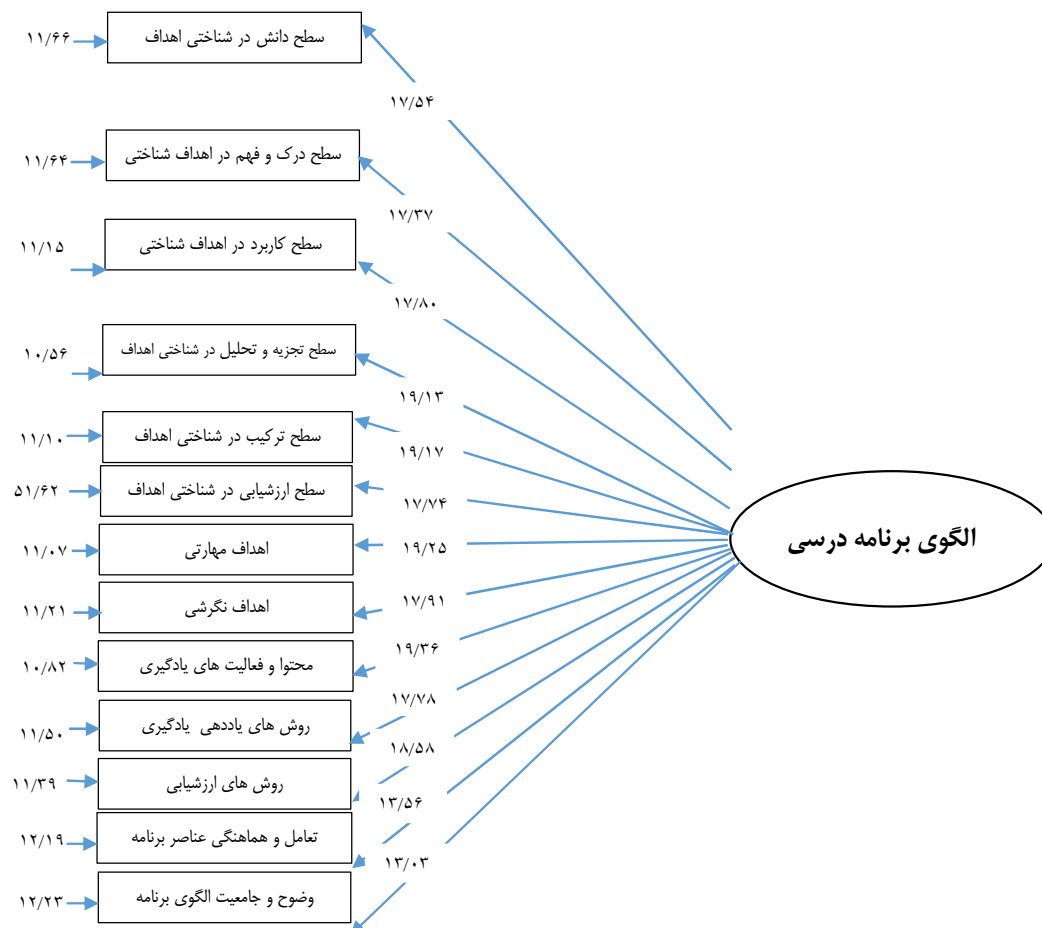
نتایج تحلیل نشان داد که عنصر محتوا و فعالیت‌های یادگیری با بار عاملی 0/87 بیشترین قدرت تبیین را دارد. عناصر اهداف مهارتی، اهداف شناختی در سطح تجزیه و تحلیل و سطح ترکیب با بار عاملی 0/86، روش‌های ارزشیابی

جدول 6: بررسی پایایی و روایی مدل اندازه‌گیری

متغیر	گویه	بار عاملی	واریانس خطا	آماره t	میانگین واریانس استخراج شده پایایی ترکیبی
توسعه دانش محتوایی تخصصی	اهداف شناختی در سطح دانش	0/81	0/34	17/54	0/67
	اهداف شناختی در سطح درک و فهم	0/81	0/35	17/37	
	اهداف شناختی در سطح کاربرد	0/82	0/32	17/80	
	اهداف شناختی در سطح تجزیه و تحلیل	0/86	0/25	19/13	
	اهداف شناختی در سطح ترکیب	0/86	0/26	19/17	
	اهداف شناختی در سطح ارزشیابی	0/82	0/33	17/74	
	اهداف مهارتی	0/86	0/25	19/25	
	اهداف نگرشی	0/83	0/32	17/91	
	محتوا و فعالیت‌های یادگیری	0/87	0/25	19/38	
	روش‌های یاددهی یادگیری	0/82	0/33	17/38	
	روش‌های ارزشیابی	0/83	0/29	18/58	
	تعامل و هماهنگی عناصر الگوی برنامه درسی	0/68	0/54	13/56	
	وضوح و جامعیت الگوی برنامه درسی	0/66	0/57	13/03	

نشان دهنده این است که متغیرهای مشاهده پذیر (گویه‌ها) حداقل 67 درصد واریانس توسعه دانش محتوایی تخصصی

میانگین واریانس استخراج شده برای توسعه دانش محتوایی تخصصی 0/67 به دست آمده است که این مقدار



Chi-square=89/43 , df=56 , p-value=0/00301 , RMSEA=0/043

شکل 2. تحلیل عاملی تأییدی مرتبه اول در حالت ضرایب معناداری (آماره t)

را تبیین می‌کنند؛ همچنین مقدار پایایی ترکیبی برای توسعه دانش محتوایی تخصصی 0/96 به دست آمد که بیشتر از حداقل 0/7 است که این نشان از پایایی و اعتبار الگو دارد.

نتیجه‌گیری و بحث

هدف پژوهش حاضر طراحی و اعتبارسنجی الگوی برنامه‌درسی توسعه دانش تخصصی دانشجویان آموزش ابتدایی در آموزش تقسیم کسرها بود. الگوی طراحی شده در این پژوهش با توجه به ویژگی‌هایی که دارد می‌تواند باعث علاقه‌مندی دانشجویان و یادگیری عمیق و توسعه دانش تخصصی آنها در تقسیم کسرها شود. در این پژوهش الگوی برنامه‌درسی پیشنهادی ارائه شده بر اساس چهار عنصر اصلی شامل: هدف، محتوا و فعالیت‌های یادگیری، روش‌های یاددهی یادگیری و روش‌های ارزشیابی طراحی شد. عنصر هدف در قالب اهداف شناختی، اهداف مهارتی و اهداف نگرشی ارائه شد.

اهداف شناختی در الگوی طراحی شده شامل دانش، درک و فهم، کاربرد، تحلیل، ترکیب و ارزشیابی می‌باشد. در بُعد دانش دانشجویان باید بتوانند مفاهیم و اصطلاحات مربوط به تقسیم کسرها را تعریف کنند، انواع مدل‌های تقسیم اعداد صحیح و تقسیم کسرها، تعبیرهای مختلف کسر، حالت‌های مختلف تقسیم کسرها، انواع الگوریتم‌ها در تقسیم کسرها و بدفهمی‌های دانش‌آموزان در تقسیم کسرها را نام ببرند. این یافته‌ها با پژوهش‌هایی از جمله پژوهش‌های آل‌نازی (2014)؛ کارپنتر (2000)؛ استین‌بروگ (2012)؛ ردموند (2009)؛ ریس (1992)؛ نیلاس (2003) و تیروش (2000) هم‌هنگی دارد. در بُعد درک و فهم دانشجویان باید بتوانند مفهوم تقسیم کسرها، انواع تقسیم کسرها، مدل‌های تقسیم کسرها، تعبیرهای کسر، الگوریتم‌های تقسیم کسرها و انواع بدفهمی‌ها در تقسیم کسرها را توضیح دهند. این بخش از یافته‌ها با نتایج پژوهش‌های گریگ و گریگ (2007)؛ نیلاس (2003)؛ تیروش (2000)؛ استین‌بروگ (2012)؛ جوهانس‌دوتیر (2013)؛ اولانف (2011) و اولانف (2014) همخوانی دارد. در بعد کاربرد دانشجویان باید بتوانند از تقسیم کسرها در حل مسائل واقعی استفاده کنند، با روش‌های مفهومی و الگوریتمی است‌های مرتبط با تقسیم کسرها را حل کنند، از انواع مدل‌های تقسیم کسرها در حل مسائل استفاده کنند و

بتوانند برای هر کدام از حالت‌های تقسیم کسرها (تقسیم عدد بر کسر، کسر بر عدد و کسر بر کسر) مثال بزنند. این یافته‌ها با یافته‌های پژوهش‌های چن (2010)؛ ردموند (2009)؛ آل‌نازی (2014)؛ استین‌بروگ (2014)، رایبر (2007) و اولانف (2011) هم‌هنگی دارد. در بعد تحلیل، دانشجویان باید بتوانند ایده‌های دانش‌آموزان در تقسیم کسرها را تحلیل کنند، بدفهمی‌های دانش‌آموزان در تقسیم کسرها را تحلیل کنند و ارتباط بین روش‌های مفهومی و الگوریتمی در تقسیم کسرها را تحلیل کنند. این یافته‌ها با یافته‌هایی از پژوهش‌های نیلاس (2003)؛ تیروش (2000)؛ فلورس و همکاران (2013)؛ لی و کولم (2008) هم‌خوانی دارد. در بعد ترکیب دانشجویان باید بتوانند درباره تقسیم کسرها است‌های معنادار طرح کنند، بتوانند بین روش‌های مفهومی و الگوریتمی در تقسیم کسرها ارتباط برقرار کنند و بتوانند الگوریتم‌های تقسیم کسرها را در حالت کلی ثابت کنند. نتایج این بخش با پژوهش‌های لئونگ و کاربون (2013)؛ تیروش (2000)؛ نیلاس (2003)؛ گریگ و گریگ (2007) و نشریه بین‌المللی علمی و پژوهشی (2016)، هم‌هنگی دارد. در بعد ارزشیابی دانشجویان باید بتوانند موقعیت‌ها و است‌های مرتبط با تقسیم کسرها را تشخیص دهند، میزان یادگیری دانش‌آموزان از تقسیم کسرها را ارزیابی کنند، نقاط ضعف و قوت دانش‌آموزان در تقسیم کسرها را ارزیابی کنند، درباره درستی یا نادرستی مباحث مرتبط با تقسیم کسرها قضاوت کنند و روش‌ها و الگوریتم‌های موجود در تقسیم کسرها را نقد و ارزیابی کنند. این یافته‌ها با پژوهش‌هایی مانند اولانف (2011)، اولانف (2014)؛ جوهانس‌دوتیر (2013)؛ رایبر (2007) و ردموند (2009)، هم‌هنگی دارد.

در بخش اهداف مهارتی؛ دانشجویان باید بتوانند با روش‌های مفهومی و الگوریتمی تقسیم کسرها را انجام دهند، بتوانند از مواد آموزشی متنوع مانند تصاویر، دست‌سازها، تلق‌های شفاف و ... در آموزش تقسیم کسرها استفاده کنند، بتوانند برای حالت‌های مختلف تقسیم کسرها است‌های معنادار و پاسخ‌باز طرح کنند، از مهارت‌های فرایندی مانند اثبات و استدلال، بازنمایی‌ها، حل‌است، ارتباطات مفهومی و ارتباطات کلامی در تقسیم کسرها استفاده کنند و بدفهمی‌های رایج دانش‌آموزان در تقسیم کسرها را شناسایی، تحلیل و راهکارهایی برای رفع آن‌ها

یافته‌ها با یافته‌هایی از پژوهش‌های تیروش (2000)، گریگ و گریگ (2007)، هماهنگی دارد.

در عنصر روش‌های ارزشیابی؛ ترکیبی از ارزشیابی تشخیصی، ارزشیابی تکوینی و ارزشیابی پایانی به عنوان روش‌های ارزشیابی در الگوی برنامه‌دستی پیشنهادی به دست آمد. این یافته‌ها با یافته‌های پژوهش‌هایی مانند وایتهد و والکوویاک (2017)، آل‌نازی (2016)، تیروش (2000)، رایتر (2007)، ردموند (2009)، لئونگ و کاربون (2013) لو و همکاران (2013) و استین بروگ (2013) مطابقت دارد.

الگوی برنامه‌دستی طراحی شده در این پژوهش به منظور توسعه دانش تخصصی دانشجومعلم آموزش ابتدایی در آموزش تقسیم کسرها، برای اولین بار در کشور طراحی شده و طبق بررسی‌های انجام شده، تاکنون چنین الگویی به صورت اختصاصی چه در داخل و چه در خارج از کشور طراحی نشده است. با توجه به اینکه الگوی طراحی شده به وسیله صاحب‌نظران و متخصصان حوزه برنامه‌ریزی درسی و آموزش ریاضی اعتباربخشی شد، یافته‌های به دست آمده نشان می‌دهد که الگوی برنامه‌دستی در پژوهش حاضر از اعتبار کافی برخوردار است و می‌تواند برای توسعه دانش تخصصی دانشجومعلم در آموزش تقسیم کسرها به صورت عملی و کاربردی در مراکز تربیت معلم کشور مورد استفاده قرار گیرد.

بر خلاف بیشتر الگوهای برنامه‌های درسی طراحی شده در کشورمان که فقط به ذکر ویژگی‌های عناصر برنامه‌دستی بسنده می‌کنند و توصیف‌گرا هستند، در این پژوهش عناصر الگوی طراحی شده به شکل ملموس، عملی و کاربردی معرفی شده‌اند که به عنوان یک راهنمای عمل‌گرا می‌تواند فعالیت‌های آموزشی آموزشگران ریاضی را سازمان‌دهی و هدفمند و دانشجومعلم را برای یادگیری اثربخش‌تر آماده و آنها را برای کاربرد آموخته‌هایشان در فرآیند آموزش ترغیب کند.

مجازی. سال هفتم، شماره چهارم. دانشگاه پیام نور. صص:

7055

دانایی‌فرد، حسن و اسلامی، آذر (1390). ساخت نظریه‌بی‌تفاوتی سازمانی (کاربرد استراتژی پژوهشی نظریه داده بنیاد در عمل). تهران: دانشگاه امام صادق. چاپ اول.

ارائه دهند. اهداف مهارتی ذکر شده در این پژوهش با یافته‌های پژوهش‌هایی مانند گریگ و گریگ (2007)؛ ردموند (2009)، آل‌نازی (2014) و استین بروگ (2012)، هماهنگی دارد.

در بخش اهداف نگرشی دانشجومعلم باید نسبت به یادگیری تقسیم کسرها و یاددهی آن به دانش‌آموزان اعتماد به نفس داشته باشند، نسبت به یادگیری تقسیم کسرها و یاددهی آن به دانش‌آموزان اضطراب و نگرانی نداشته باشند و نسبت به اثربخشی خودشان در آموزش تقسیم کسرها به دانش‌آموزان نگرش مثبتی داشته باشند. این یافته‌ها با یافته‌های پژوهش‌هایی مانند چن (2010)، لی و کولم (2008)، لی و هوانگ (2008) ردموند (2009)، جوهانس‌دوتیر (2013) و اولانف (2011)، هماهنگی دارد.

در عنصر محتوا و فعالیت‌های یادگیری در الگوی طراحی شده، محتوایی که باید برای دانشجومعلم ارائه شود عبارت‌اند از: تقسیم عدد صحیح بر کسر، تقسیم کسر بر عدد صحیح و تقسیم کسر بر کسر، همچنین فعالیت‌های یادگیری شامل: مدل‌های تقسیم کسرها، مدل‌های بدفهمی‌های دانش‌آموزان در تقسیم کسرها، روش‌های الگوریتمی در تقسیم کسرها، روش‌های مفهومی در تقسیم کسرها و بسته دانش در تقسیم کسرهاست که این یافته‌ها با یافته‌هایی از پژوهش‌های تیروش (2000)، نیلاس (2003)، رایتر (2007)، ردموند (2009)، آل‌نازی (2014) ما (1999)، گریگ و گریگ (2007) و رُسلی و همکاران (2015) هماهنگی دارد.

در عنصر روش‌های یاددهی یادگیری، تلفیقی از روش‌های آموزش فعالیت محور (آموزش از طریق حل است)، مفهوم محور، روش توضیحی، روش اکتشافی، بحث‌های گروهی، روش تمرین و تکرار و روش پرسش و پاسخ به عنوان روش‌های آموزش برای الگوی برنامه‌دستی توسعه دانش تخصصی تقسیم کسرها، به دست آمد. این

منابع

ایزدی، مهدی و ریحانی، ابراهیم (1399). استفاده از یک تکلیف غیرمعمول برای بررسی دانش تکلیف ریاضی و دانش محتوایی عمومی معلمان دوره ابتدایی استان تهران از مفهوم کسر. فصلنامه علمی پژوهش در یادگیری آموزشگاهی و

- کرسول، جان و کلارک، پلانو (2007). روش‌های پژوهش ترکیبی. ترجمه‌علیرضا کیامنش و جاوید سرابی (1394). تهران: آبیژ. چاپ دوم.
- ملایی‌نژاد، اعظم (1391). صلاحیت‌های حرفه‌ای مطلوب دانشجو معلمان دوره‌آموزش ابتدایی. فصلنامه نوآوری‌های آموزشی، شماره 44.
- مرکز ملی مطالعات بین‌المللی پرلز و تیمز (1395). پژوهشگاه مطالعات آموزش و پرورش، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.
- Alenazi, A. (2014). Understanding pre-service teachers' self-assessment : the case of fraction division. Submitted to the Graduate Faculty as partial fulfillment of the requirements for the Doctor of Philosophy Degree in Curriculum and Instruction. University of Toledo.
- Alenazi, A. (2016). Development of an Instrument to Measure Fraction Division Paration Sense. Proceedings of Intcess. International Conference on Education and Social Sciences. 656-663.
- Bair, S.G & Rich, B.S. (2011). Characterizing the Development of Specialized Mathematical Content Knowledge for Teaching in Algebraic Reasoning and Number Theory. *Mathematical Thinking and Learning*, Illinois State University. 13: 292–321.
- Ball, D. (1990). The mathematical understandings that prospective teachers bring to teacher education. *Elementary School Journal* , 90 (4), 449-466.
- Ball, D. L, Hill, H. C, & Bass, H. (2005). *Knowing Mathematics for Teaching*. the quarterly journal of the American Federation of Teachers, AFL-CIO. American Educator, 14–22.
- Ball, D. L, Thames, M. H, & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching. What makes it special? *Journal of Teacher Education*. 389-407.
- Ball, D. L. (1990). Prospective elementary and secondary teachers' understanding of division. *Journal for Research in Mathematics Education*. 132–144.
- Ball, D. L., & Bass, H. (2000). Interweaving content and pedagogy in teaching and learning to teach: Knowing and using mathematics. In J. Boaler (Ed.), *Multiple perspectives on the teaching and learning of mathematics*. 83 – 104.
- رحیمی، زهرا؛ طلایی، ابراهیم؛ ریحانی، ابراهیم و فردانش، هاشم (1396). تاکید بر راه‌حل‌های چندگانه: کلیدی برای تقویت مهارت تعمیم در تفکر ریاضی‌وار. فصلنامه تعلیم و تربیت. شماره 130. 9 40.
- شورای عالی آموزش و پرورش (1391). برنامه‌درسی ملی جمهوری اسلامی ایران. وزارت آموزش و پرورش.
- شورای عالی آموزش و پرورش (1390). سند تحول بنیادین آموزش و پرورش. وزارت آموزش و پرورش.
- فراستخواه، مقصود (1395). روش تحقیق کیفی در علوم اجتماعی با تاکید بر نظریه‌بر پایه. تهران: آگاه. چاپ سوم.
- Ball, D. L. (2016). Content knowledge for Teaching: Examples from Elementary Mathematics. Client Conference.
- Burke, M.K. (2013). Examining Mathematical Knowledge for Teaching In The Mathematics Teaching Cycle:A Multiple Case Study. A Dissertation Presented in Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree Doctor of Philosophy. Rizona State University.
- Carollo, L.R. (2013). Beyond Elementary: Examining Conceptual Demands of Division of Fractions in Current US Curricula. *Oregon Undergraduate Research Journal*. 4:35-53.
- Carpenter, T. C., Lindquist, M. M., Brown, C. A., Kouba, V. L, Silver, E. A., & Swafford, J. O. (1988). Results of the fourth NAEP assessment of mathematics: Trends and conclusions. *Arithmetic Teacher*. 36 (4), 38–41.
- Carreno, E, Rojas, N, Montes .M, Flores. P. (2013). Mathematics Teacher's Specialized Knowledge. Reflections Based on Specific Descriptors of Knowledge. 'Research Seminar. into Mathematics Education "University of Huelva, Spain. 2976-2984.
- Chapin, S. (2014). *Teachers Specialized Content Knowledge: Preparing Future Elementary School Teachers to Teach Mathematics*. Boston University. 1-28.
- Chen, X. (2010). A Study of Prospective Mathematics Teachers Knowledge Development and Beliefs Changes for Teachings Fraction Division. Submitted to the Office of Graduate Studies of Texas A&M University in partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy.
- Chinapan, S. (2014). *Teachers Specialized Content Knowledge: Preparing Future Elementary School Teachers to Teach Mathematics*. Elementary Pre-Service Teachers Mathematics Project (EMP) Bostone University.
- Chinnappan, M & White, B. (2015). *Specialised Content Knowledge: Evidence of Pre-*

- service teachers' Appraisal of Student Errors in Proportional Reasoning. Mathematics education in the margins (Proceedings of the 38th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia), 157-164.
- Chinnappan, M., Forrester. T, Hoare. E.T. (2012). Developments in Pre-service Teachers' Mathematics for Teaching of Fractions. Mathematics education: Expanding horizons (Proceedings of the 35th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia). Singapore: MERGA.
- Christou.C & et ai. (2005). An empirical taxonomy of problem posing processes. *ZDM* 2005 Vol. 37 (3)
- Diaz.j.p , Felmer.P , Randolph.V , González.G. (2017). Problem Solving as a Professional Development Strategy for Teachers: A Case Study with Fractions. *EURASIA Journal of Mathematics Science and technology Education*. 13 (3):987-999.
- Ding. M & Heffernan. K. (2018). Transferring specialized content knowledge to elementary classrooms: preservice teachers' learning to teach the associative property. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. 1-23.
- Ding, M. (2016). Developing preservice elementary teachers' specialized content knowledge: the case of associative property. *International Journal of STEM Education*. 3:9. 1-19.
- English, L. D. (1998). Children's problem posing within formal and informal contexts. – In: *Journal for Research in Mathematics Education* 29 (No.1: 83-106.
- Flores. E, Escudero .D.I, Carillo. G. (2013). A Theoretical Review of Specialised Content Knowledge. University of Huelva, Spain. 3055-3064.
- Gregg, J., & Gregg, D. (2007). Measurement and fair-sharing models for dividing fractions. *Mathematics Teaching in the Middle Grades*, 12 (9), 490-496.
- Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In J. Hiebert (Ed.), "Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics". 1-27.
- Hill, Heather .C & Ball, Deborah. L & Schilling, Stephan, G. (2008). Unpacking Pedagogical Content Knowledge: Conceptualizing and Measuring Teachers' Topic-Specific Knowledge of Students. *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 39, No. 4, 372-400.
- Hurrell, D. P. (2013). What Teachers Need to Know to Teach Mathematics: An argument for a reconceptualised model. *Australian Journal of Teacher Education*, Vol 38.54-64.
- International Journal of Scientific and Research Publications (2016). Pre-service teachers' procedural and conceptual knowledge of fractions. Vol. 6.324-328.
- Jacinto & Jakobsen. (2020). Mathematical Knowledge for Teaching: How do Primary Pre-service Teachers in Malawi Understand it? *African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education*. 1-10.
- Jackson. B, Dimmel. J , Muller, M. (2016). Developing mathematical knowledge for teaching in content courses for preservice elementary teachers. University of Maine. 1-6.
- Jane Lo, J.J & Luo. F. (2012). Prospective elementary teachers' knowledge of fraction division. *J Math Teacher Educ. Springer Science+Business Media B.V.*
- Jóhannsdóttir, B. (2013). The Mathematical Content Knowledge of Prospective Teachers in Iceland .Submitted in partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy under the Executive Committee of the Graduate School of Arts and Sciences. Columbia University.
- Lai, M.Y & Clark, J. (2018). Extending the notion of Specialized Content Knowledge: Proposing constructs for SCK. *Mathematics Teacher Education and Development*. Vol 20.2, 75-95
- Lai, M.Y & Ho, S.Y. (2012). Preservice Teachers Specialized Content Knowledge on Multiplication of Decimals. 12th International Congress on Mathematical Education Program Name XX-YY-zz (pp. abcde-fghij) .8 July – 15 July, 2012, Coex, Seoul, Korea.
- Leung, I.K, Carbone. R.E. (2013). Pre-service Teachers' Knowledge about Fraction Division Reflected through Problem Posing. *The Mathematics Educator*. Vol. 14, No. 1&2, 80-92.
- Li, Y. (2008). What do students need to learn about division of fractions? *Mathematics Teaching in the Middle School*, 13, 546-552.
- Li.Y , Kulm.G (2008). Knowledge and confidence of pre-service mathematics teachers: the case of fraction division. *ZDM Mathematics Education*. 40:833-843.

- Lin, Y. C., Chin, C. & Chiu, H.Y. (2011). Developing an instrument to capture high school mathematics teachers' specialized content knowledge: An exploratory study. In Ubuz, B. (Ed.). Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 1, pp. 353. Ankara, Turkey: PME.
- Lo, J.J, Luo, F. (2012). Prospective elementary teachers' knowledge of fraction division. *J Math Teacher Educ.* DOI 10.1007/s10857-012-9221-4.
- Lueke, H.M. (2009). Pre-Service Teachers Mathematical Knowledge for Teaching: A Comparison of Two University Mathematics Courses. Dissertation submitted to the Faculty of the Graduate School of the University of Maryland, College Park, in partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy.
- Ma, L. (1999). Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States. Mahwah, N.J: Lawrence Erlbaum Associates.
- Maniraho, j.f. (2017). The pedagogical content knowledge (PCK) of Rwandan grade six mathematics teachers and its relationship to student learning. School of Education, College of Humanities University of KwaZulu-Natal Pietermaritzburg, South Africa.
- Markworth, K., Goodwin, T., & Glisson, K. (2009). The Development of Mathematical Knowledge for Teaching in the Student Teaching Practicum. In D. S. Mewborn & H. S. Lee (Eds.). AMTE Monograph, 6. Scholarly Practices and Inquiry in the Preparation of Mathematics Teachers. San Diego, California: Association of Mathematics Teacher Educators.
- Mcco, A. C. (2011). Specialized Mathematical Content Knowledge of Preservice Elementary Teachers: The Effect of Mathematics Teachers Efficacy. A Dissertation in Curriculum and Instruction and Urban Leadership and Policy Studies in Education.
- Morris, A., Hiebert, J., and Spitzer, S. (2009). Mathematical knowledge for teaching in planning and evaluating instruction: What can preservice teachers learn? *Journal for Research in Mathematics Education.* Vol. 40, No. 5, 491-529
- Nillas, L. (2003). Division of Fractions: Pre-service Teachers' Understanding and Use of Problem Solving Strategies. *The Mathematics Educator.* Vol.7, No. 2, 96 - 113.
- Olanoff, D, Lo, J, Tobias J.M. (2014). Mathematical Content knowledge for Teaching Elementary Mathematics: A Focus on Fractions. *The Mathematics Enthusiast,* Vol. 11, no. 2, pp. 267–310 .
- Olanoff, D.E. (2011). Mathematical Knowledge for Teaching Teachers: The Case of Multiplication and Division of Fractions. Submitted in partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy in Mathematics Education in the Graduate School of Syracuse University .
- Petry, D. N. (2016). The Development of Specialized Content Knowledge in Beginning Algebra Among Secondary Mathematics Pre-Service Teachers. A dissertation submitted in partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy in Mathematics.
- Rayner, V. (2007). An Examination of the Type of Instruction that Facilitates Preservice Teachers Development of Specialized Content Knowledge of Division with Fractions. A Thesis in the Department of Education. Concordia University. Montreal, Quebec, Canada.
- Rayner, V, Osana, P.H & Pesco, D. (2013). A Comparison of Instruction That Develops Preservice Teachers Specialized Content Knowledge of Division of Fractions. Concordia University. 3-5.
- Redmond, A. (2009). Prospective Elementary Teachers Division of Fractions Understanding: A Mixed Methods Study.. Submitted to the Faculty of the Graduate College of the Oklahoma State University in partial fulfillment of the requirements for the Degree of Doctor of Philosophy.
- Rosli, R, Goldsby, D, Capraro, M.M. (2015). Using Manipulatives in Solving and Posing Mathematical Problems. *Creative Education.* 6, 1718-1725
- Sabri İpek, A. (2018). Pre-Service Elementary Mathematics Teachers' Specialized Content Knowledge: The Case of Integer Addition and Subtraction. *International Journal of Progressive Education,* Vol. 14 Number 4, 70-84.
- Skilbeck, M. (1984). School – based curriculum development. London: Harper and Row Publisher.
- Steenbrugge, H.V. (2012). Teaching fractions in elementary school. Proefschrift ingediend tot

- het behalen van de academische grad van Doctor in de Pedagogische Wetenschappen.
- Stewart, V. (2005). Making Sense of Students' Understanding of Fractions: An Exploratory Study of Sixth Graders' Construction of Fraction Tirosh, D. (2000). Enhancing prospective teachers' knowledge of children's conceptions: The case of division of fractions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31, 5–25.
- Tirosh, D. (2000). Enhancing prospective teachers' knowledge of children's conceptions: The case of division of fractions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31, 5–25.
- Whitehead, A.N, & Walkowiak, T. A (2017). Preservice Elementary Teachers' Understanding of Operations for Fraction Multiplication and Division. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*. Vol. 18.3, 293 – 317.
- Zembar & Bayram. (2019). An Articulation of Specialized Content Knowledge of Mathematics Teachers in the Context of Measurement Concept. *The European Conference on Educational Research at Universität Hamburg, Germany*.